Список литературы

1. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Начертательная геометрия. Учебник для вузов. – М.: Высшая школа. 2008–272с.
2. Короев Ю.И. Начертательная геометрия. – Спб.: ПИТЕР. 2006.– 247с.
3. Крылов Н.Н. начертательная геометрия. – М.: Высшая школа. 2001.–221с.
4. Тарасов Б.Ф. Начертательная геометрия. – Спб.: Лань. 2002.–240с.
5. Фролов С.А. Начертательная геометрия. – М.: Машиностроение. 2000.–238с.

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Ижевский государственный технический университет”

Начертательная геометрия
Часть I

Методическое пособие по темам

Метод проекций

Ортогональные проекции геометрических фигур

1. Проекции точки
2. Проекции прямой
3. Проекции плоскости

Ижевск, 2008

УДК 744

Дулотин В.А., Бабина Л.И.

Начертательная геометрия. Методические указания по курсу “Начертательная геометрия” в 2 ч. – Ч. I. – Ижевск: Издательство ИжГТУ, 2008 г. - 60 с.

Рецензенты:
к.т.н. Хохряков Л.А. доцент кафедры «Инженерная графика и технология рекламы» ИжГТУ,
Волжанова О.А. старший преподаватель УдГУ

Начертательная геометрия входит в состав обязательных дисциплин технических и архитектурно-строительных вузов. Пособие представляет разделы краткого курса начертательной геометрии в соответствии с требованиями государственных стандартов по подготовке бакалавров, магистров и дипломированных специалистов в технических вузах.

В конце каждого раздела размещены примеры решения задач и вопросы для закрепления материала и самоконтроля.

Пособие предназначено для студентов технических специальностей высших учебных заведений.

Указания утверждены на заседании кафедры “Инженерная графика и технология рекламы” протокол № 49 от 08.10.2008 г.

$\ell \parallel \alpha\ (a \cap в) \Rightarrow \ell' \parallel в',\ \ell'' \parallel в''$. Рис.5.20, *а*

На рис. 5.20, *б* плоскость β задана своей фронтальной проекцией (β″). Прямая $\ell'' \parallel \alpha''$, а ℓ' взята произвольно, так как любая прямая лежащая в плоскости $\alpha(\alpha \perp \pi_2)$ проецируется на фронтальную плоскость совпадая с проекцией самой плоскости β″.

5.9 Относительное положение плоскостей

Относительное положение плоскостей предполагает два случая:

– плоскости пересекаются
– плоскости параллельны

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. (Рис. 5.21)

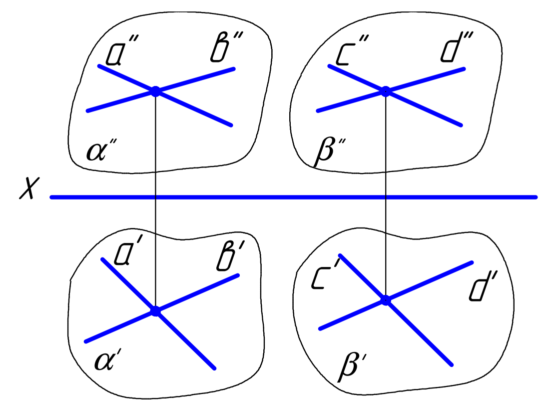


Рис. 5.21

$\alpha\ (a \cap в) \parallel \beta\ (c \cap d)$ т.к. $a \parallel c$, $в \parallel d$ ($a'' \parallel c''$, $a' \parallel c'$, $в'' \parallel d''$, $в' \parallel d'$).

Пересечение плоскостей будет рассмотрено в следующих главах.

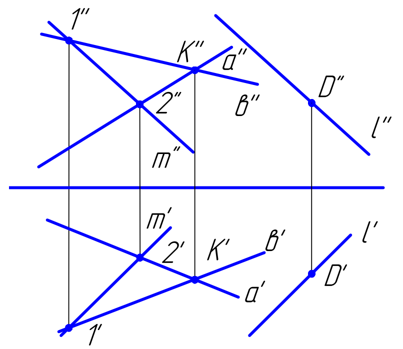


Рис. 5.18

Прямая $\ell \parallel \alpha$, так как $\ell \parallel m$. При решении этой задачи, возможно воспользоваться и прямой задающей плоскость рис. 5.19.

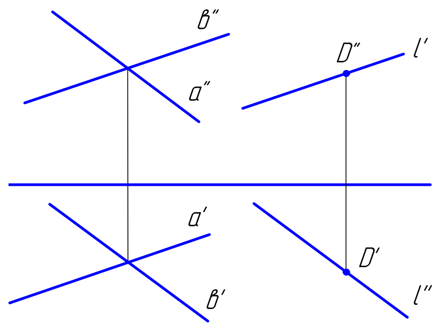
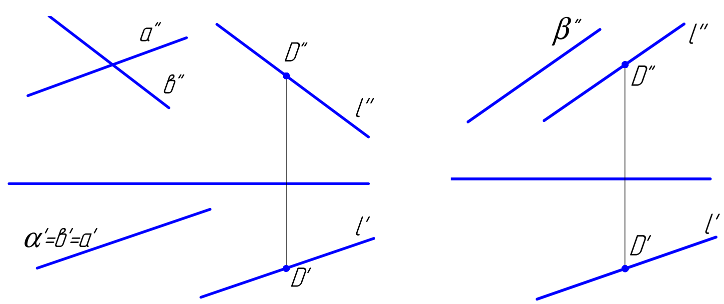


Рис. 5.19

Через точку D проводим $\ell \parallel \alpha$ ($a \cap \text{в}$), $\ell'' \parallel \text{в}''$, $\ell' \parallel \text{в}'$. На рис. 5.20 плоскости заданы проецирующими. α ($a \cap \text{в}$)$\perp \pi_1$, $\beta(\beta'') \perp \pi_2$.



а *б*

Рис. 5.20

Содержание

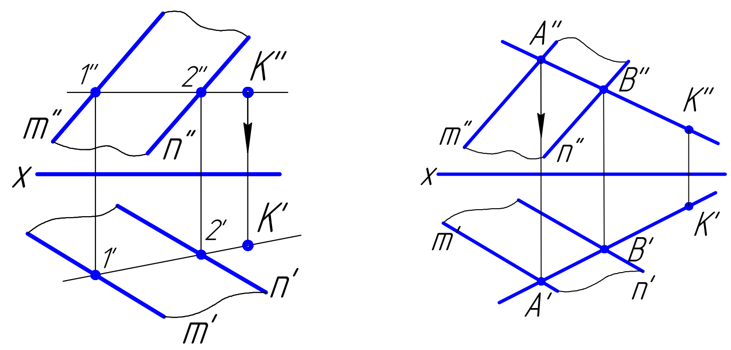
Принятые обозначения и сокращения

Изображение знаков выполняется в соответствии с принятыми стандартами оформления технической и международной документации.

A,B,C,D…	Обозначение точки: прописные буквы латинского алфавита
1,2,3,4…	арабские цифры.
a,b,c,d…	линии: строчные буквы латинского алфавита
$\alpha,\beta,\gamma,\delta$…	плоскости, углы: строчные буквы греческого алфавита.
π	плоскости проекций.
(AB)	прямая линия, проходящая через точки A и B
[AB]	отрезок, ограниченный точками A и B
[AB)	луч, ограниченный точкой A и проходящий через точку B
$\|Aa\|$	расстояние от точки A до линии a
$\|A\alpha\|$	расстояние от точки A до плоскости α
$\|ab\|$	расстояние между линиями a и b
=	совпадение (A=B – точки совпадают) и результат действия
$\equiv$	конгруэнты (равны по величине и форме)
$\parallel$	параллельны
$\perp$	перпендикулярны
$\dot{-}$	скрещиваются
$\rightarrow$	отображается последовательность действий
$\Rightarrow$	следует, логическое следствие
$\in$	принадлежит, является элементом множества $A\in \ell$ – точка принадлежит линии ℓ; $\ell \ni A$ – линия проходит через точку A
$\cap$	пересечение; a = $\alpha\cap\beta$ - прямая a получена пересечением плоскостей α и β
^	угол между прямыми линиями
$\angle\alpha$	угол α (или число в градусах)
$\angle ABC$	угол с вершиной в точке B
⊾	действительное значение прямого угла.
к.ч.	комплексный чертёж
д.в.	действительная величина.

I. 1. Проводим горизонталь плоскости, проходящую через точку *К*. (рис.5.1, *а*) $(1''2'') \parallel x$ и $K'' \subset (1''2'')$.

2. Находим $(1'2') \in \alpha$ $(1' \subset m', 2' \subset m')$
3. На линии $(1'2')$ определяем K'.
4. Точка К принадлежит плоскости α.



а *б*

Рис. 5.17

II. 1. Проводим фронтальную проекцию прямой АВ через K'' принадлежащую плоскости. (рис.5.17, *б*)

2. Находим горизонтальную проекцию прямой АВ и точки К.
3. Прямая АВ принадлежит плоскости.

5.8. Относительное положение прямой и плоскости

Прямая линия может принадлежать плоскости ($\ell\in\alpha$), быть параллельной ($\ell\parallel\alpha$) и пересекаться с ней ($\ell\cap\alpha$). Задача принадлежности прямой плоскости рассмотрена в разделе 5.6.

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой этой плоскости.

Если через точку D $(D'D'')$ (рис. 5.18) требуется провести прямую параллельную плоскости $\alpha(a\cap b)$, то нужно через точку D провести прямую ℓ параллельно любой прямой этой плоскости.

В плоскости α $(a\cap b)$ проводим прямую m (1,2). Через точку D проводим проекции прямой ℓ, $\ell'\parallel m'$, $\ell''\parallel m''$.

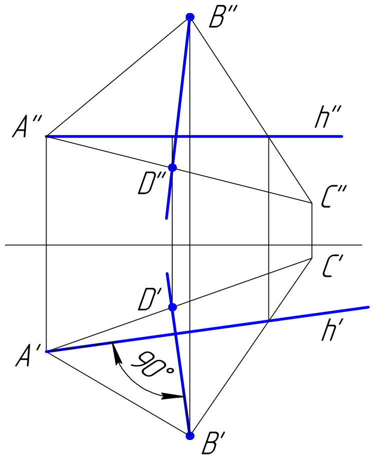


Рис.5.15

1. Проведём горизонталь плоскости h'', h'
2. Через точку B′ проведём горизонтальную проекцию линии $B'D' \perp h'$ и построим её фронтальную проекцию $B''D''$.

Линии наибольшего наклона используются при решении задач на определение углов наклона плоскости к плоскости проекции.

Пример 3. Через точку *K*, принадлежащую плоскости $\alpha\,(m \parallel n)$ провести прямую так, чтобы она принадлежала плоскости. (рис. 5.16)

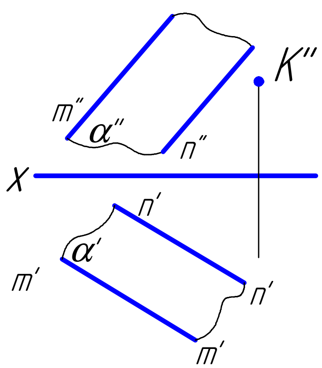


Рис.5.16

ГЛАВА I

Цели и сущность предмета.

Начертательная геометрия – это геометрия чертежа, геометрия плоских изображений. Она изучает способы построения плоских изображений пространственных геометрических объектов, их геометрические свойства и методы решения пространственных задач на этих изображениях.

По сути своей начертательная геометрия является уникальным техническим языком, теорией или основой плоского изображения.

Процесс производства любого изделия начинается с разработки конструкторской документации. Данные о геометрической форме изделия и его параметрах содержит графическая часть конструкторской документации, которая называется чертежом.

Чертежи, построенные методами начертательной геометрии, должны отвечать следующим требованиям:

1. *Наглядность.* Это свойство чертежа вызывать пространственное представление об изделии.
2. *Простота построений.* Построение изображений и решение на них должны быть достаточно простыми.
3. *Обратимость.* Возможность воспроизведения пространственной формы, размеров и положения изображенного объекта в пространстве.
4. *Возможность решения* геометрических задач с достаточной степенью точности.

Отсюда вытекают основные задачи начертательной геометрии:

1. Изучение и разработка методов построения изображений.
2. Изучение инвариантных геометрических свойств плоских изображений.
3. Разработка методов решения пространственных геометрических задач на плоскости.
4. Разработка условий, обеспечивающих обратимость чертежа и качественное изготовление изделий с учётом новых технологий.

Основным методом начертательной геометрии является

метод проекций, поэтому чертежи, построенные этим методом, называют **проекционными.**

ГЛАВА II

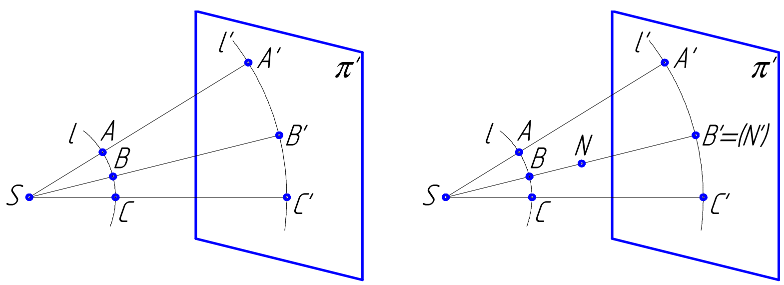
Метод проекций.

Для построения изображений на плоскости используют два способа проецирования.

1. Центральное.
2. Параллельное (косоугольное), прямоугольное или ортогональное.

2.1 Центральное проецирование

Выберем некоторую плоскость π', которую будем называть *плоскостью проекций,* линию ℓ - геометрический объект и точку S – *центр проецирования* (рис.1, *а*)



а *б*

Рис. 2.1

Плоскость проекций не имеет границ, а на рисунке её выделяют плоской фигурой для наглядности. Плоскость π' и центр проекций S, при заданном его расположении относительно π', называют *аппаратом проецирования.*

Для получения изображения линии ℓ на плоскости π' выберем точку А (рис.1, *а*). Для того, чтобы получить центральную проекцию точки А, надо провести

начинают с её фронтальной проекции $h'' \parallel x$ так, чтобы она пересекала элементы задающие плоскость $1'' = h'' \cap a'' \rightarrow 1' \subset a'$; $2'' = h'' \cap в'' \rightarrow 2' \subset в'$.

2) Фронталь плоскости f – прямая проходящая через М плоскости α – параллельна фронтальному следу (фронталь f_o нулевого уровня) рис.5.14, *а*. Очевидно, что семейство фронталей плоскости – это семейство параллельных прямых.

На комплексном чертеже $f' \parallel x$. Точка М (М′М″) $= f \cap \pi_1$ – фронтальный след фронтали, $f'' \parallel f_{o\alpha}$

Построение фронтали плоскости общего положения, заданной пересекающимися прямыми α (а ∩ в) рис.5.14, начинают с её горизонтальной проекции $f' \parallel x$, так чтобы она пересекала элементы задающие плоскость:

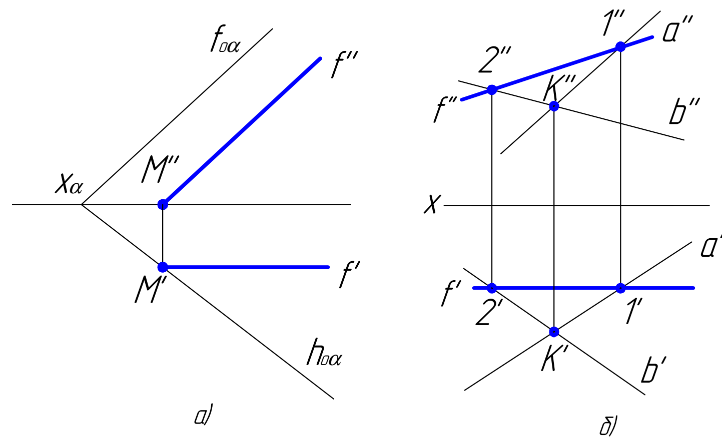


Рис. 5.14

$1' = f' \cap a' \rightarrow 1'' \in a''$, $2' = f' \cap в' \Rightarrow 2'' \in b''$.

Аналогично решается задача с профильной прямой p_o.

Прямые, принадлежащие плоскости и перпендикулярные плоскости проекций называют линиями наибольшего наклона или линиями ската плоскости (рис. 5.15).

Построим линию наибольшего наклона пл.α(ΔАВС) к горизонтальной плоскости проекций.

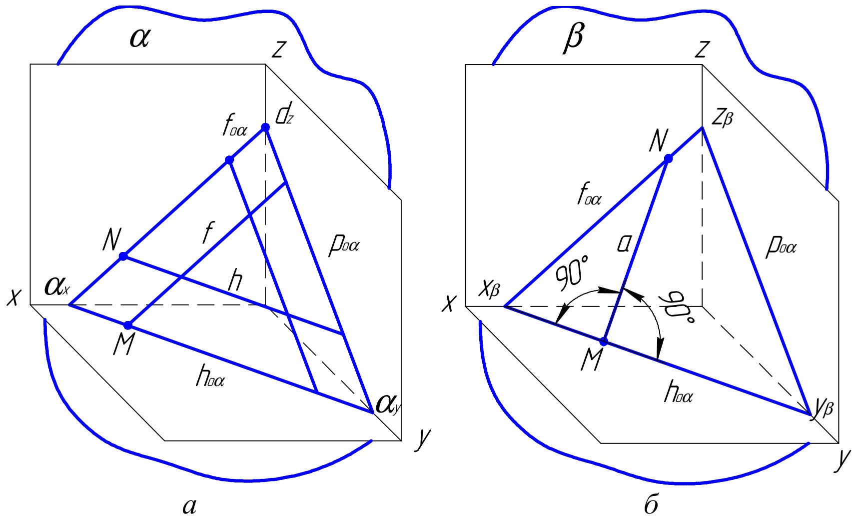


Рис. 5.12

Очевидно, что семейство горизонталей плоскости – это семейство параллельных прямых.

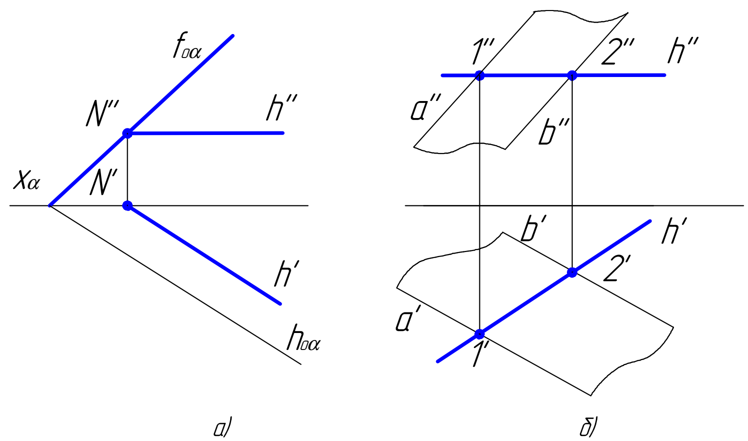


Рис.5.13

На комплексном чертеже $h'' \parallel x$. Точка N (N′, N″) = α ∩ π_2, $h' \parallel h_{0\alpha}$.

Построение горизонтали плоскости общего положения, заданной параллельными прямыми α(a ∩ б) (рис.5.13,б)

проецирующий луч SA до пересечения его с плоскостью проекции π'.

A'= (SA]∩π', то есть изображение A' точки A на плоскости π' получается как результат пересечения прямой (SA) с плоскостью π'. Для построения изображения линии ℓ на ней выбирается ряд точек (A,B,C...), которые проецируются на плоскость π'. Проекции точек (A,B,C...) соединяются плавной кривой, и получается центральная проекция линий ℓ′ на плоскости π'. Если две (B,N) или несколько точек лежат на одной проецирующей прямой (SB), то они называются конкурирующими (рис.1, *б*). Точка N' невидима, так как она закрывается точкой B′.

Центральное проецирование называют ещё перспективой и применяют при выполнении перспективных чертежей зданий и сооружений.

Отметим важные инвариантные (сохраняющиеся) свойства центральных проекций.

Свойство 1. Проекция точки является точка, A→A′ (рис.2.2).

Свойство 2. Проекцией линии в общем случае является линия. Если линия (AB) прямая, то проекция в общем случае будет прямая (A'B'), AB→A'B' (рис.2.2). Изображение проецирующей прямой (CD), совпадающей с проекционным лучом, вырождается в точку (C' ≡ D'), а расположенные на ней точки являются конкурирующими (рис.2.2)

Свойство 3. Если точка принадлежит линии, то проекция точки принадлежит соответствующей проекции линии К∈ AB → К'∈ A'B', (рис.2.2).

Центральное проецирование обладает хорошей наглядностью, но сравнительно сложно в построении изображений и в решении позиционных и метрических задач.

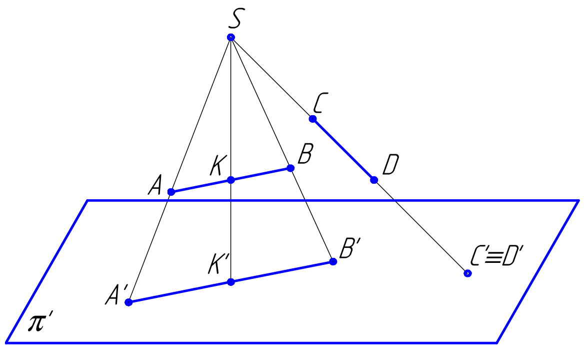


Рис. 2.2

Центральное проецирование не обеспечивает обратимость чертежа, следовательно, нужны дополнительные условия, позволяющие не только узнать точку по её изображению, но и определить её положение в пространстве.

2.2 Параллельное проецирование.

Если центр проецирования S удалить в бесконечность, то проецирующие лучи можно считать параллельными (рис.2.3). В этом случае задаётся направление $\vec{S}$.

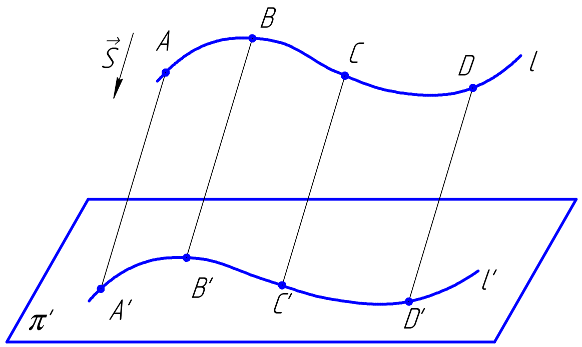


Рис. 2.3

Если через точку A (рис.2.3) провести проецирующий луч параллельно направлению $\vec{S}$, то пересекая плоскость проекций π′, он даст параллельную проекцию A′ точки A.

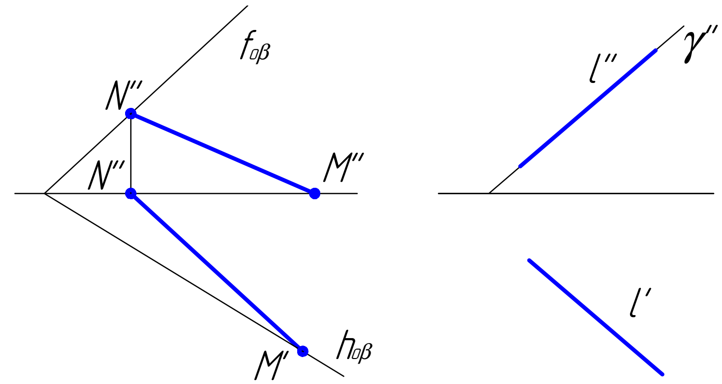


Рис. 5.11

Пример 1: Прямая MN $\subset \alpha$ ($f_{o\beta} \cap h_{o\beta}$) $\Rightarrow$ N $\subset f_{o\beta}$, M $\subset h_{o\beta}$ (рис. 5.11)

При решении этих задач использовалось условие, что если точка принадлежит плоскости, то она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости.

Пример 2: Прямая $\ell \in \gamma \Rightarrow \gamma \perp \pi_2$, а $\ell'' \in \gamma''$

Здесь используется свойство проецирующих плоскостей – любая фигура, расположенная в этой плоскости проецируется на фронтальную плоскость совпадая с фронтальным следом.

5.7. Главные линии плоскости.

Главными линиями плоскости называют:

1. Прямые, принадлежащие плоскости и параллельные какой – либо плоскости проекций – прямые уровня.
2. Прямые, принадлежащие плоскости и перпендикулярные какой – либо плоскости проекций – прямые наибольшего наклона.

Прямые уровня подразделяются на три вида:

1) Горизонталь плоскости h – прямая, проходящая через точку N плоскости α и параллельная горизонтальному следу (горизонталь $h_{o\alpha}$ нулевого уровня) рис.5.13, *а*.

точки A и B принадлежат этой плоскости α (и обратное утверждение: если A и B принадлежат плоскости α, то прямая проходящая через эти точки принадлежит плоскости α).

б) Прямая принадлежит плоскости α, если она проходит через одну точку этой плоскости и параллельна прямой, лежащей в плоскости.

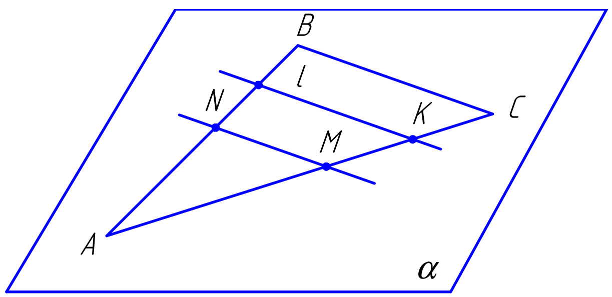


Рис.5.9

Определителем плоскости α является ΔABC. Прямая MN ∈ α, так как M ∈ AC, N ∈ AB. Прямая ℓ ∈ α, так как K ∈ AC и ℓ ∥ MN, (рис.5.9). Прямая (AB)∈β(m∥n), ⇒ A∈m, B∈n (рис.5.10, а)

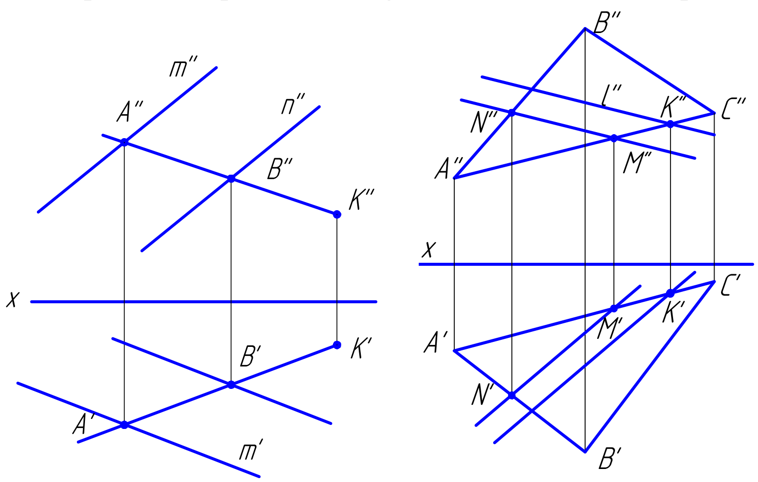


Рис.5.10

Для получения проекции линии ℓ на ней берётся ряд точек, которые проецируются на плоскость π' (рис. 2.3)

Параллельные проекции обладают всеми свойствами центральных проекций, но у них есть и свои инвариантные свойства.

Свойство 4. Если линии пересекаются, то их проекции так же пересекаются AB∩CD = k, A'B'∩C'D' = k' (рис.2.4).

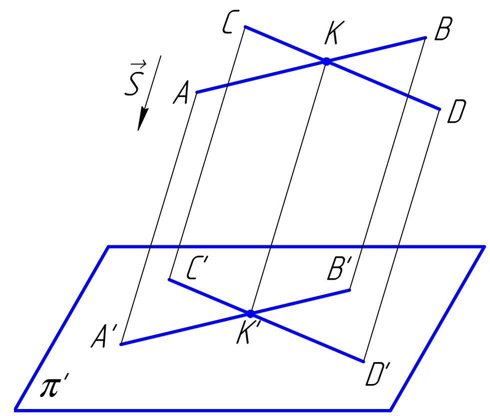


Рис.2.4

Эти свойства очевидны и вытекают из самого способа построения проекций.

Свойство 5. Прямые параллельные в пространстве имеют параллельные проекции, то есть проекции параллельных прямых параллельны (рис.2.5).

Возьмём в пространстве параллельные отрезки AB∥CD и спроецируем их на плоскость π'. Прямые AA', BB' образуют плоскость α, которая будет параллельна плоскости β отображённой прямыми CC' и DD'.

Пересекаясь с плоскостью π' они дают параллельные между собой отрезки A'B' и C'D'. AB∥CD → A'B'∥C'D'.

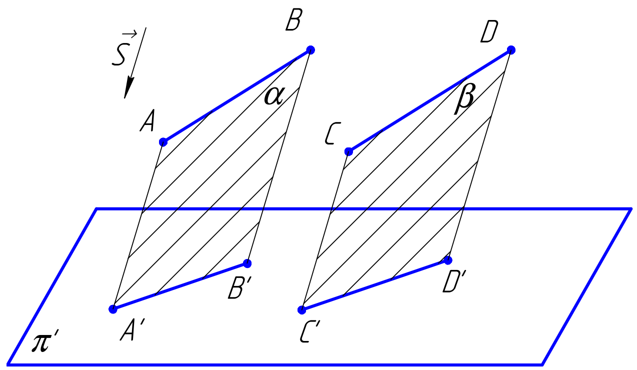


Рис. 2.5

Свойство 6. Если отрезок делится точкой в каком - то отношении, то и проекция отрезка делится проекцией этой точки в том же отношении (рис.2.6)

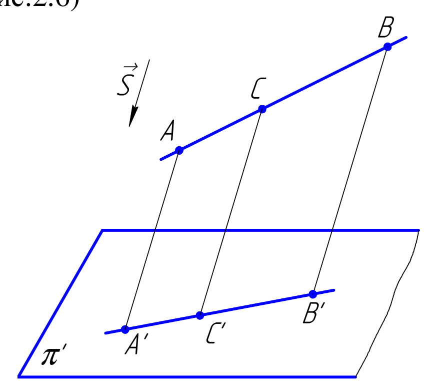


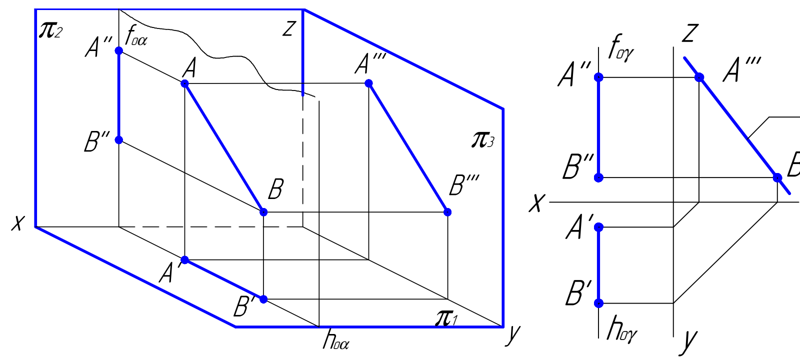
Рис. 2.6

Если отрезок прямой АВ делится точкой С в отношении АС/СВ, то и проекция отрезка А'В' делится точкой С' в таком же отношении $\frac{A'C'}{C'B'}$.

Свойство 7. Отрезок прямой, параллельной плоскости проекций, проецируется в натуральную величину (рис.2.7).

величину (ΔA″B″C″=ΔABC) (рис. 5.7, *б*) Горизонтальный след $h_{o\alpha}$ (горизонтальный след – проекция β') параллелен оси x (рис. 5.8, *а*, *б*).

3. Плоскость γ параллельная профильной плоскости проекций называется <u>профильной плоскостью</u>. Любая фигура, расположенная в этой плоскости на профильную плоскость проецируется в действительную величину (A‴B‴=AB) (рис. 5.8)



а *б*

Рис. 5.8

Горизонтальный след $h_{o\gamma}$ параллелен оси x, фронтальный след $f_{o\gamma}$ параллелен оси z.

Примечание: Плоскость параллельная одной плоскости проекций, является частным случаем проецирующей плоскости. Следует отметить важное свойство плоскостей уровня – проекции любых геометрических фигур, принадлежащих горизонтально (фронтально) проецирующей плоскости, принадлежат горизонтальному (фронтальному) следу этой плоскости. Аналогично утверждение и для профильно – проецирующей плоскости.

5.6. Прямая и точка в плоскости.

Рассмотрим принадлежность прямой и точек плоскости.

Из школьной геометрии известно что:

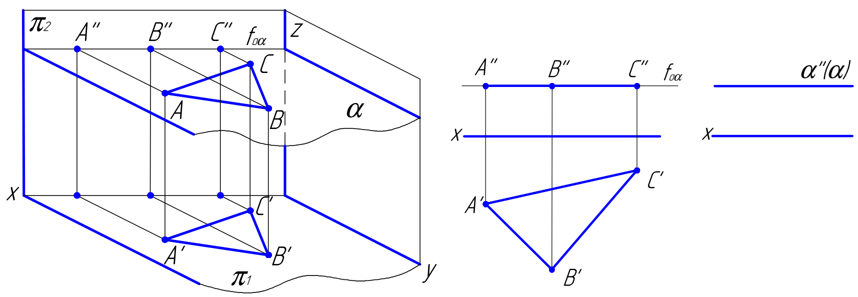
а) Прямая АВ принадлежит плоскости α, если две её

5.5. Плоскости уровня.

Плоскости уровня – это плоскости, параллельные одной из плоскостей проекций (к двум другим они перпендикулярны).

1. Плоскость α, параллельная горизонтальной плоскости π_1, называется горизонтальной плоскостью (рис.5.6, *а*).

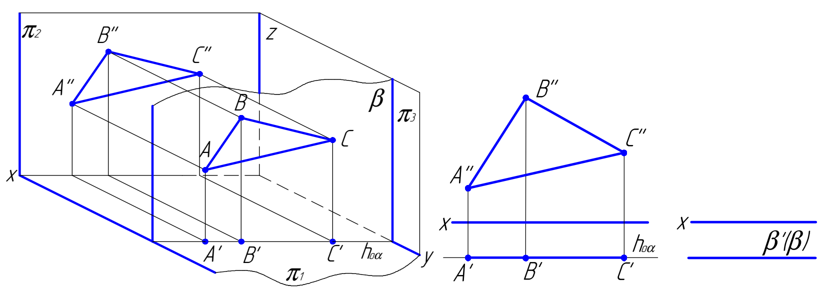
Любая фигура, расположенная в такой плоскости, проецируется на горизонтальную плоскость проекций в действительную величину (ΔA′B′C′=ΔABC) (рис.5.6, *б*). Фронтальный след $f_{o\alpha}$ (фронтальный след – проекция – α″) параллелен оси *x* (рис. 5.6, *б, в*)



а *б* *в*

Рис. 5.6

2. Плоскость *β*, параллельная фронтальной плоскости проекций π_2, называется фронтальной плоскостью (рис. 5.7, *а*)



а *б* *в*

Рис. 5.7

Любая фигура, расположенная в этой плоскости проецируется на фронтальную плоскость в действительную

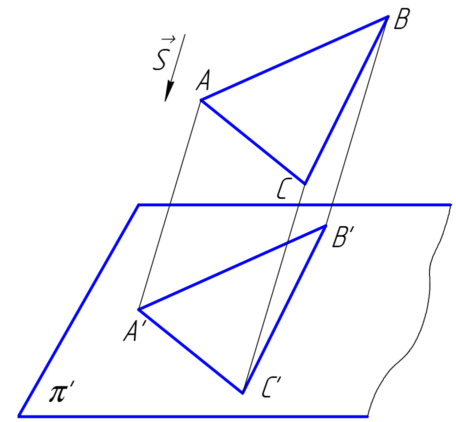


Рис.2.7

Если [AB]‖π', то фигура AA'BB' - параллелограмм, значит |AB| = |A'B'| .

Свойство 8 Плоская фигура, параллельная плоскости проекций проецируется также в натуральную величину.

Если ΔABC ‖π', то ΔABC ≡ ΔA'B'C', что является следствием свойства 7.

Параллельное проецирование называется косоугольным, если направление S образует острый угол с плоскостью проекций (S ⊥ π').

Параллельные проекции проще в построении изображений, обладают достаточно хорошей наглядностью, но решение геометрических задач в них все-таки затруднено и представленном виде они не обеспечивают обратимости чертежа. Этот вид проецирования применяется для построения наглядных (аксонометрических) изображений.

Если направление проецирования перпендикулярно плоскости проекции (S⊥π'), то проецирование называют **ортогональным** или **прямоугольным.**

2.3 Ортогональное (прямоугольное) проецирование

Ортогональные проекции сохраняют все рассмотренные свойства центральных и параллельных проекций и имеют несколько дополнительных свойств.

Свойство 9. Ортогональная проекция отрезка не может быть больше своей натуральной величины.

Свойство 10. Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна ей, то на эту плоскость проекций прямой угол проецируются в виде прямого угла, то есть без искажения (рис.2.8)

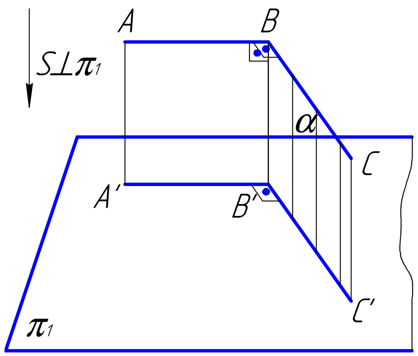
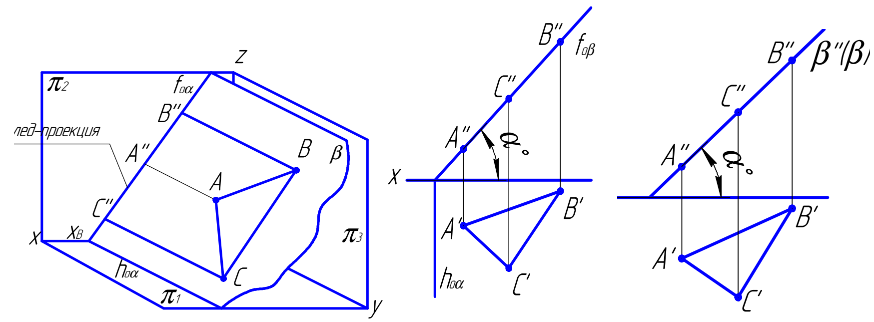


Рис.2.8

$\angle ABC = 90^\circ$, сторона $AB \parallel \pi_1$, а сторона $BC \perp \pi_1$.

Докажем, что $\angle A'B'C' = 90^\circ$. Сторона $AB \perp \alpha$, образованной прямыми BB', CC', так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости ($AB \perp BC$ по условию и $AB \perp BB'$ по построению) но $AB \parallel A'B'$, следовательно, $A'B' \perp \alpha$, а потому $A'B' \perp BC$, то есть $\angle ABC = 90^\circ$.

Ортогональные проекции просты в построении изображений объектов и в решении позиционных и метрических задач. Для обеспечения обратности изображений нужны дополнительные условия. Например: проекции с числовыми отметками или проецирование на несколько плоскостей проекций.

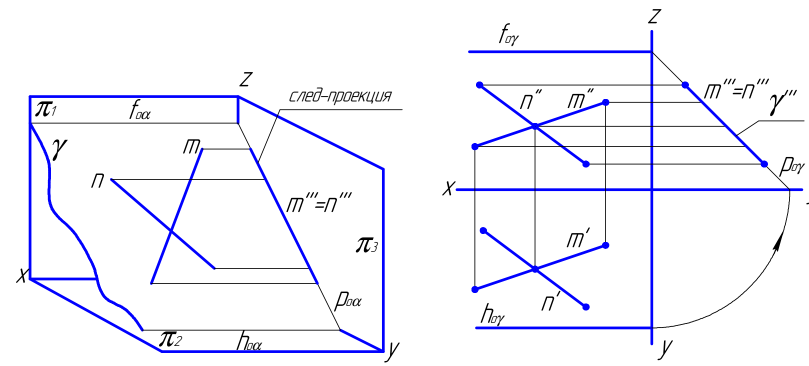


а б в

рис. 5.4.

Ее свойства аналогичны, поэтому не повторяются.

в) Профильно-проецирующая плоскость – это плоскость, перпендикулярная к профильной плоскости проекций (рис. 5.5).



а б

Рис.5.5

Во всех случаях одна из проекций плоскости – прямая линия, совпадающая со следом плоскости. Прямые α', β'', γ''' – <u>след проекция</u> плоскостей α, β, γ соответственно.

На комплексном чертеже след-проекция проецирующей плоскости располагается под углом к оси проекции, равным углу наклона ее к соответствующей плоскости проекций:

<u>Одна из проекций геометрических образов, лежащих в этих плоскостях, отрезок линии, совпадающей со следом – проекцией плоскости; ни одна из проекций этого образа не равна его действительной величине.</u>

5.3. Плоскости частного положения.

Плоскости частного положения – это плоскости, параллельные или перпендикулярные к плоскостям проекции.

1. Плоскости, перпендикулярные плоскостям проекции, называются проецирующими плоскостями.

2. Плоскости, параллельные плоскостям проекций, называются плоскостями уровня.

5.4. Проецирующие плоскости.

а) Горизонтально-проецирующая плоскость (α) – это плоскость, перпендикулярная к горизонтальной плоскости проекции (рис. 5.3).

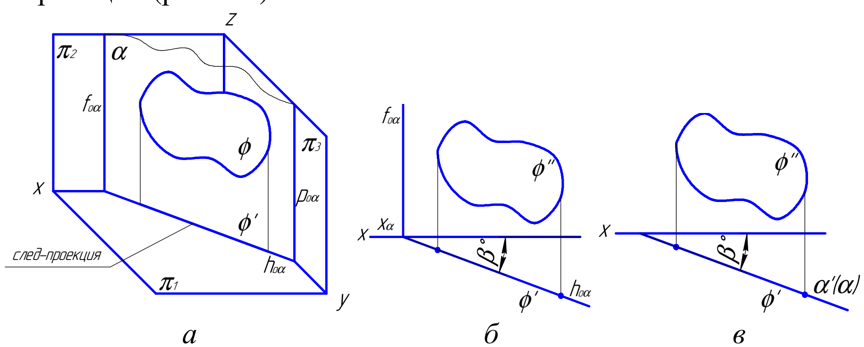


рис.5.3.

Горизонтальная проекция плоскости α вырождается в прямую, совпадающую с горизонтальным следом $h_{0\alpha}$. Эту прямую называют след-проекция, т.к. все геометрические элементы, лежащие в одной плоскости (Ф) проецируются на горизонтальную плоскость, совпадая с горизонтальным следом (рис.5.3, *а*).

Фронтальный след всегда перпендикулярен оси X и поэтому при решении задач его можно не указывать (рис. 5.3, *в*).

б) Фронтально-проецирующая плоскость – это плоскость, перпендикулярная к фронтальной плоскости проекции (рис.5.4).

ГЛАВА III

Образование и свойства комплексного чертежа.

Для обратимости чертежа используется метод, систематизированный и изложенный французским учёным Г.Монжем*, в котором геометрические образы проецируются на взаимно перпендикулярные плоскости проекций.

Чертёж, состоящий из нескольких взаимосвязанных проекций, называется **комплексным.**

3.1 Комплексный чертёж.

При использовании двух плоскостей проекции (рис.3.1, *а*) плоскость π_1 располагается горизонтально и называется горизонтальной плоскостью проекции. Плоскость π_2 располагается перпендикулярно к π_1 перед наблюдателем, и называется фронтальной плоскостью проекций. Прямая пересечения этих плоскостей называется осью проекций x.

Спроецируем точку А (рис.3.1, *а*) на две взаимно перпендикулярные плоскости π_1 и π_2. Получаем точки A' и A''.

A' - горизонтальная проекция точки A

A'' - фронтальная проекция точки A.

Плоскость α - образованная проецирующими лучами AA' и AA'' перпендикулярна к π_1 и π_2 и оси x. Эта плоскость пересекает ось x в точке Ax, а плоскости проекций по прямым

$\alpha \cap \pi_1 = A'A_x \perp x$

$\alpha \cap \pi_1 = A''A_x \perp x$

Преобразование пространственной модели в плоскую осуществляется путем совмещения горизонтальной плоскости проекций с фронтальной путём вращения вокруг оси x (рис.3.1, *б*).

---

* Французский геометр Гаспар Монж (1746-1818) является основателем системы прямоугольного проецирования на две взаимно перпендикулярные плоскости. Его система возникла как аналог координатного способа Декарта при решении геометрических задач, получила широкое применение в технике. В 1795 году была создана научная дисциплина. Названная Гаспар Монжем «Геометрия графическая» или как говорили в России «Геометрия начертатания - начертательная геометрия».

На (рис.3.1, *б*) чертеже показывается изображение плоскостей проекции после совмещения: ось x, проекции A' и A'' и линия их соединяющая. Так как плоскости проекций бесконечны, то нет необходимости показывать их на комплексном чертеже (рис.3.1, *в*). Таким образом, мы совместили два поля проекций, каждое из которых не ограничено размерами.

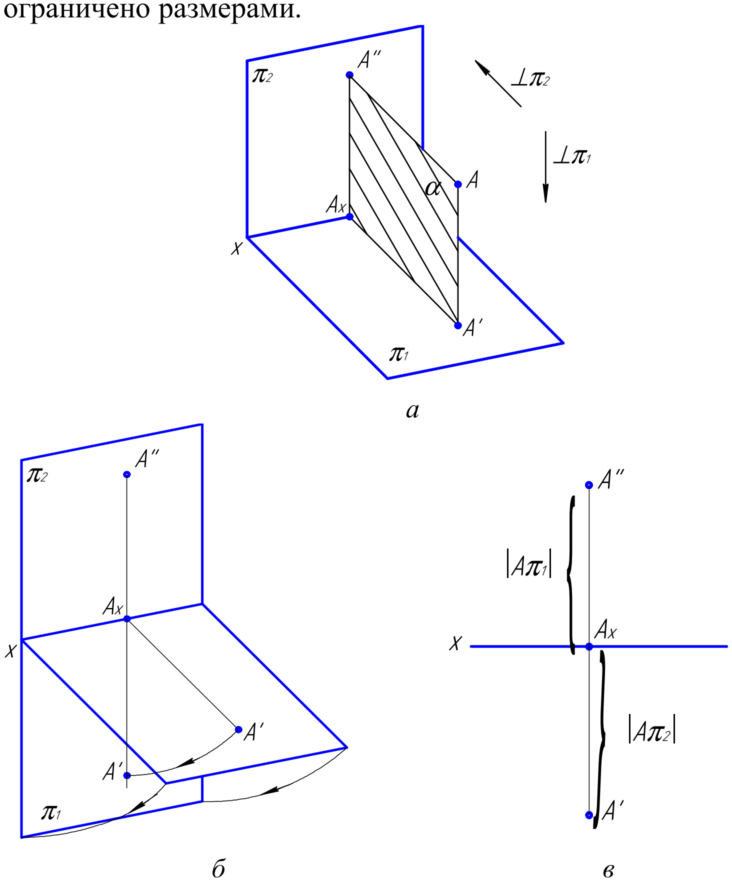


Рис. 3.1

Линия (A'A'') называется **вертикальной линией связи.** Она всегда перпендикулярна оси проекций x. Полученное изображение называют комплексным чертежом точки.

$f_{o\alpha}=\alpha\cap\pi_2$ – фронтальный след плоскости α

$p_{o\alpha}=\alpha\cap\pi_3$ – профильный след плоскости α

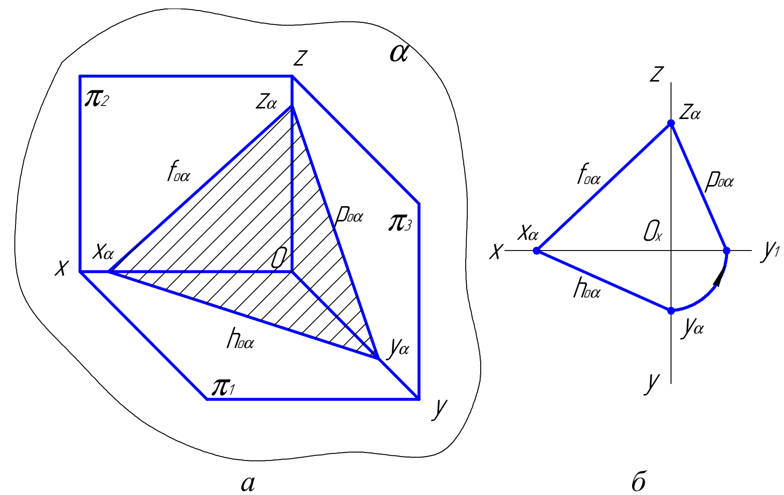


рис.5.2

Точки $X_\alpha=\alpha\cap x$, $Y_\alpha=\alpha\cap y$, $Z_\alpha=\alpha\cap z$ в которых пересекаются два следа – называются точками схода следов.

Задание плоскости следами – эта задание плоскости пересекающимися прямыми нулевого уровня.

Показанная на рис.5.2 плоскость α занимает общее (произвольное) положение по отношению к плоскостям проекции (углы наклона этой плоскости к плоскостям проекции произвольные – отличные от 0 и 90°). Такая плоскость называется плоскостью общего положения. Во всех остальных случаях плоскость занимает частное положение относительно плоскостей проекций.

Расположение ортогональных проекций геометрических элементов, задающих плоскости общего положения, имеет отличительный признак.

Признак плоскости общего положения: ни одна из ортогональных проекций геометрических элементов, задающих плоскость общего положения, не сливается в прямую линию; следы плоскости общего положения не параллельны и не перпендикулярны осям проекций.

элементов называется определителем плоскости.

Положение плоскости в пространстве однозначно определяется различными точками A, B, C, не принадлежащие одной прямой. Это позволяет записать определитель в виде Ф (A,B,C).

Разновидностями этого определителя могут быть Ф (m,A), где $A \not\subset m$, Ф $(m \cap n)$, Ф $(m \parallel n)$, Ф $(\Delta A,B,C)$

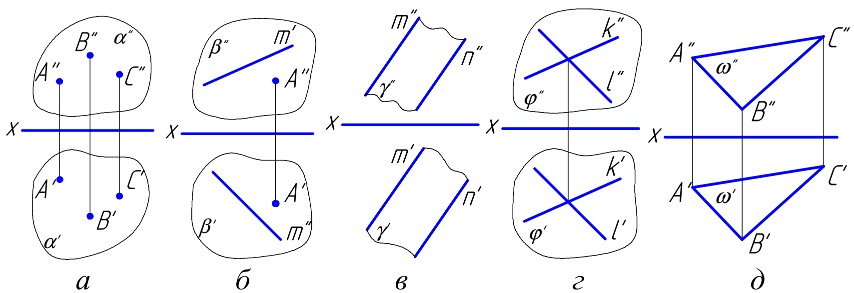


Рис. 5.1

Поэтому для задания плоскости на комплексном чертеже достаточно указать проекции:

1) трех точек, не принадлежащих одной прямой $\alpha(A,B,C)$ (рис.5.1, *а*);

2) прямой и точки вне ее β (A, m) (рис. 5.1, *б*);

3) двух параллельных прямых γ $(n \parallel m)$ (рис. 5.1, *в*);

4) двух пересекающихся прямых φ $(\ell \cap k)$ (рис. 5.1, *г*);

5) плоской фигуры $\varphi(\Delta A,B,C)$ (рис. 5.1, *д*);

6) в некоторых случаях бывает целесообразным задавать плоскость не произвольными пересекающимися прямыми, а прямыми, по которым эта плоскость пересекает плоскости проекций. Такой вариант задания плоскости называют задание плоскости следами.

На рис. 5.2 показана плоскость α. Эта плоскость пересекает координатные оси в точках $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$, а плоскости по прямым $h_{o\alpha}$, $f_{o\alpha}$, $p_{o\alpha}$.

Прямую, по которым плоскость пересекает плоскость проекции, называют следом этой плоскости.

$h_{o\alpha} = \alpha \cap \pi_1$ – горизонтальный след плоскости α

Комплексным чертежом называется плоский обратимый чертёж, полученный путём совмещения плоскостей проекций.

По чертежу (рис.3.1, *в*) легко восстановить пространственную картину. Если в точках A' и A'' восстановить перпендикуляры (проецирующие лучи), то их пересечение определит единственную точку A (рис.3.1, *а*), то есть обратимость обеспечена.

Расстояние от точки A до горизонтальной плоскости определяется на чертеже (рис.3.1, *в*) величиной отрезка $A''A_x$, то есть $|A\pi_1| = A''A_x$. Расстояние до точки A от фронтальной плоскости определяется величиной отрезка $A'A_x$, то есть $|A\pi_2| = A'A_x$. Таким образом задавая расстояние от точки A до плоскостей проекций можно построить и проекции этой точки на комплексном чертеже.

Рассмотрим более подробно комплексный чертёж с принятыми обозначениями и терминами.

Плоскости проекций π_1 и π_2 делят всё пространство на четыре части, которые называют четвертями. Наблюдатель всегда находится в I четверти, а сами четверти обозначаются против часовой стрелки (рис.3.2).

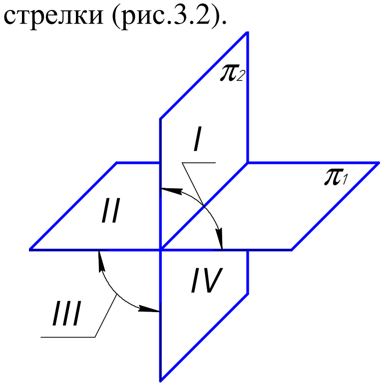
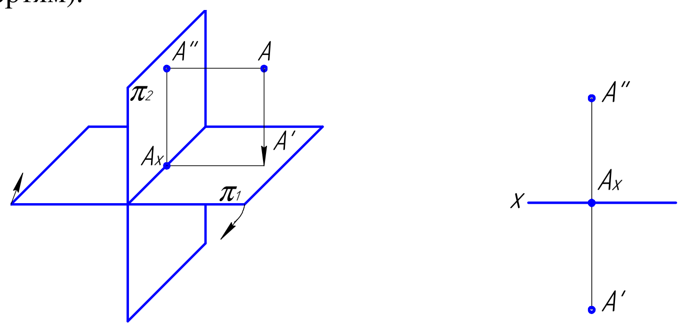


Рис. 3.2

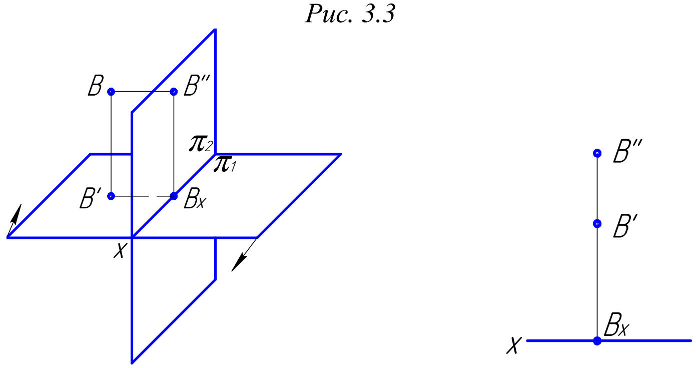
На чертежах (рис.3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7) даны пространственные и комплексные чертежи точек, лежащих в различных четвертях пространства.

Точка A∈I четверти, точка B∈II четверти, точка C∈III четверти, точка D∈IV четверти, точка F∈ плоскости π_2 (∈I, II четвертям).



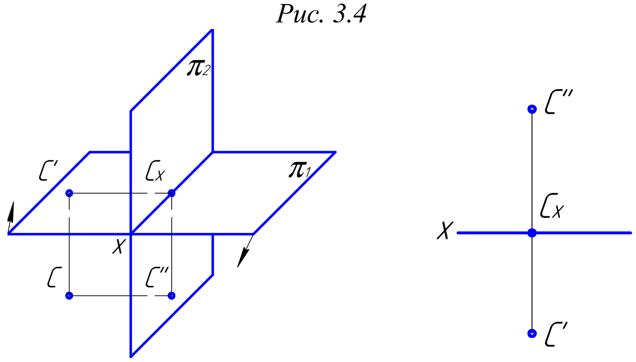
а *б*

Рис. 3.3



а *б*

Рис. 3.4



а *б*

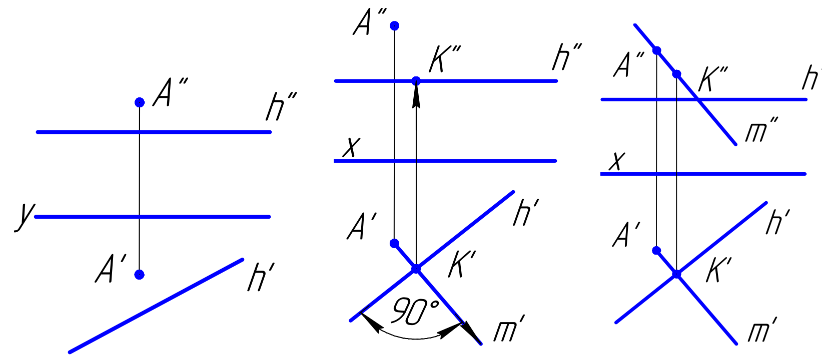
Рис. 3.5

Решение:

Заданная прямая – горизонталь, так как h″‖x.

Согласно свойству 10 (2.3 стр. 12) угол 90^0 между искомой прямой m и заданной спроецируется без искажения на горизонтальную плоскость (h‖π_1).

1. Проводим через точку A′ луч m′ под углом 90^0 к прямой h′ (рис. 4.27, *б*).
2. Отмечаем точку K′=m′∩h′
3. Находим K″ по принадлежности к h″ с помощью линии связи.



а *б* *в*

Рис. 4.27

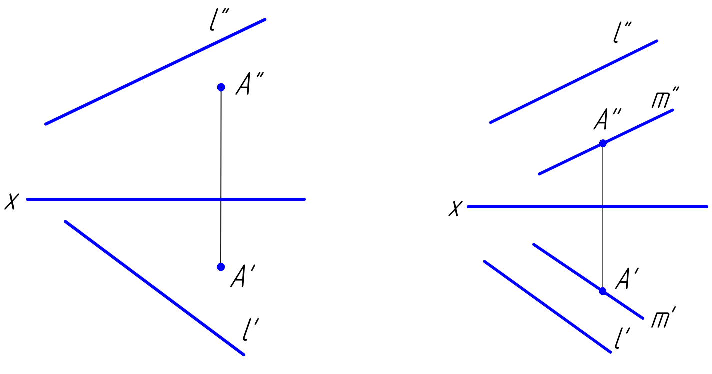
4. Строим фронтальную проекцию m″ прямой m – соединяем точки A″ и K″ (рис. 4.27, *в*)
5. Прямая m(m′,m″) – искомая.

ГЛАВА V

Комплексный чертеж плоскости.

5.1. Задание плоскости на комплексном чертеже.

Плоскость является простейшей поверхностью. Образование и проецирование поверхностей будет подробно рассмотрено в разделе «Поверхности». Для задания поверхности достаточно выделить на ней элементы, однозначно определяющие ее в пространстве. Набор этих



а б

Рис. 4.25

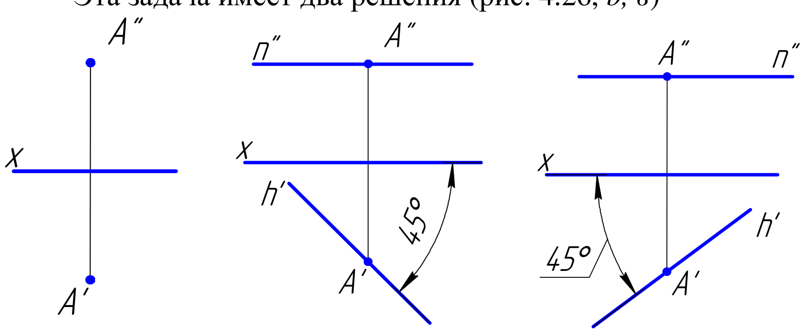
Пример 3.

Через точку А провести горизонтальную прямую h, составляющую с плоскостью π_2 угол 45° (рис 4.26а).

Решение: Строим фронтальную проекцию прямой h ($h''\parallel x$ и h'' проходит через точку A'').

Горизонтальная проекция прямой будет проходить через A' и составлять с осью x угол 45°, так как угол проецируется на плоскость π_1 без искажения.

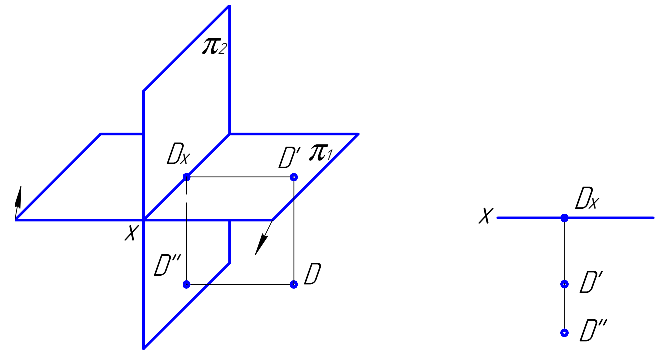
Эта задача имеет два решения (рис. 4.26, *b, в*)



а б в

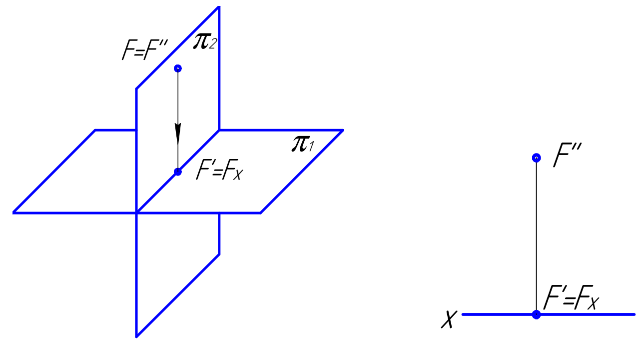
Рис. 4.26

Пример 4. Через точку А провести прямую m, пересекающую прямую h под углом 90^0 (рис. 4.27)



а б

Рис. 3.6



а б

Рис. 3.7

Чертежи фигур в системе двух плоскостей проекций определяют их форму, размеры и положение в пространстве. Так как пространственные формы являются трехмерными, то для построения сложных изделий используют не две, а три плоскости проекций.

3.2. Пространственная и плоскостная модель проекций.

Наиболее удобной для фиксирования положения геометрической фигуры в пространстве и выявления её формы по ортогональным проекциям является, декартова система координат, состоящая из трёх взаимно-перпендикулярных плоскостей π_1, π_2, π_3 (рис.3.8)

π_1 - горизонтальная плоскость проекций

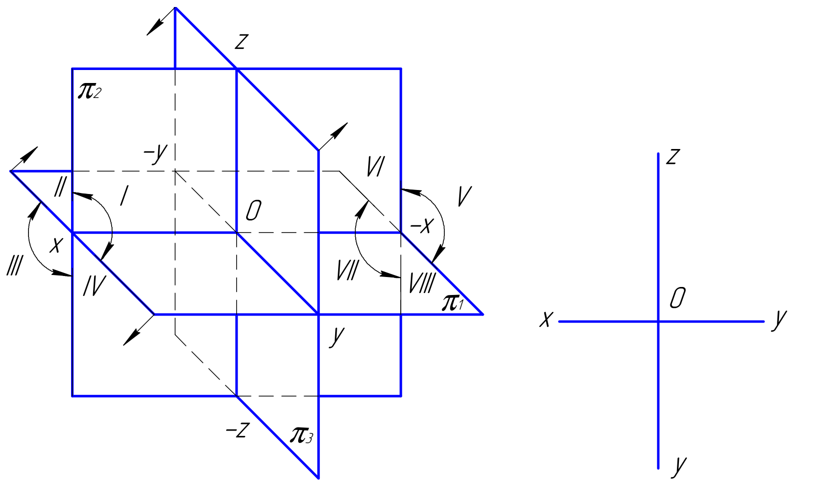
π_2 - фронтальная плоскость проекция

π_3 - профильная плоскость проекции

Прямые X, Y, Z - оси проекций

Точка О - начало координат

Введением плоскости π_3 всё пространство делится на восемь частей, каждая из которых называется октантом. Октанты условно принято обозначать римскими цифрами, так как это показано на рис.3.8. Каждый из октантов представляет прямоугольный трёхгранник, у которого гранями служат части плоскостей проекций (называемые полами).



а *б*

Рис.3.8

Совмещение плоскостей, при переходе к плоскостной модели показано на рис.3.8 стрелками. Плоскость π_1 поворачивается вокруг оси x на 90° и совмещается с плоскостью π_2. Плоскость π_3 поворачивается вокруг оси Z против часовой стрелки, также совмещаются с плоскостью π_2. Так как плоскости не имеют границ, то в совмещённом положении (на комплексном чертеже) эти границы не показывают, так же не показывают отрицательное направление координатных осей. В окончательном виде пространственная модель примет вид, показанный на рис.3.8, *б*.

На рис. 3.9 представлен I октант пространства и произвольная точка. Опустив перпендикуляры из точки А на

Приложение к темам «Проецирование точки», «Проецирование прямой».

Рассмотрим примеры решения задач с использованным выше изложенных положений.

Пример 1.

На отрезке АВ найти точку С, делящую ее в отношении 1:2 от точки А (рис. 4.24) (не применяя мерительного инструмента).

Для построения искомой точки К разделим отрезок АВ на три равные части. Для этого к любой из проекций отрезка АВ (например, А′В′) проводим под произвольным углом прямую и откладываем на ней циркулем три правильных отрезка произвольной длины. Отмечаем точку K_0 и B_0. Соединяем точку (B_0) с точкой В′. Проводим через точку K_0 луч [K_0)‖B_0В′, в пересечении его с А′В′ получим точку К′ и с помощью линии связи – точку К″. Точка К (К′, К″) – искомая точка.

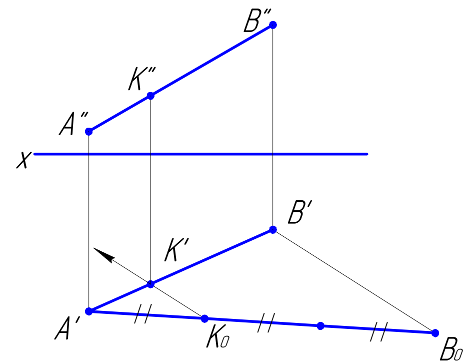


Рис. 4.24

Пример 2. Через точку А провести прямую m, параллельную заданной прямой ℓ. (рис.4.25)

Решение:

Согласно свойству параллельных прямых m‖ℓ => m″‖ℓ″, m′‖ℓ′.

Так искомая прямая должна проходить через точку А, то через точку А′ проводим m′‖ℓ′, а через точку А″– m″‖ℓ″ (рис. 4.5 б).

прямые не параллельные и не пересекающиеся) (рис. 4.23, *а,б*).

Итак, если прямые скрещиваются, то проекции их могут пересекаться, но точки пересечения не лежат на одной линии связи (рис. 4.23, *а*).

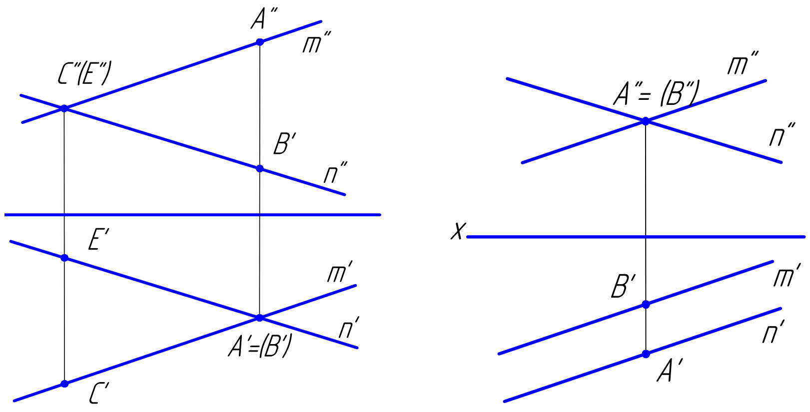


Рис. 4.23

Рассмотрим проекции скрещивающихся прямых m и n (рис. 4.23, *а*), и отметим, что точки A и B являются горизонтально-конкурирующими точками.

Точка A ⊂ m, а B ⊂ n, но $Z_A>Z_B$, следовательно прямая m удалена от горизонтальной плоскости на большее расстояние, чем прямая n. Следовательно прямая m находиться над прямой n и при взгляде сверху точка A «закроет» точку B. Проекцию невидимой точки B обозначим в скобках.

Точки C и E – фронтально-конкурирующие: C ∈ m, E ∈ n, C″=E″, $Y_C>Y_D$, следовательно прямая m удалена от плоскости π_2 на большее расстояние.

Отсюда следует, что прямая n лежит за прямой m и точка E будет невидима. C помощью этих точек в дальнейшем при решении позиционных задач определяется видимость геометрических образов.

Рассмотрим примеры решения задач с использованным выше изложенных положений.

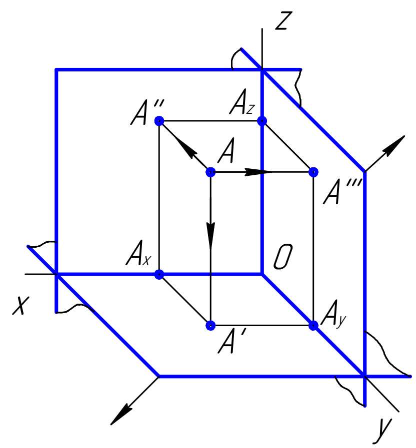


Рис.3.9

плоскости π_1, π_2, π_3 найдем соответствующие проекции точки A. A′ - горизонтальная, A″ - фронтальная, A‴ - профильная проекции точки. На комплексном чертеже прямая A′A″ расположилась перпендикулярно к оси x, прямая A″A‴ - перпендикулярно к оси z. Линия A″A′ - вертикальная линия связи; линия A″A‴ - горизонтальная линия связи. Отметим, что на трёхмерном чертеже любые две проекции точки определяют её положение в пространстве. Поэтому положение профильной проекции A‴ строго определено двумя проекциями A′ и A″ и строится по определённому правилу.

Построение профильной проекции A‴ по двум имеющимся A′ и A″ выполняется следующим образом (рис.3.10).

Профильная проекция располагается на одной горизонтальной линии связи с фронтальной проекцией A″.

Профильная проекция отстоит от оси Z на величину отрезка, равного расстоянию от горизонтальной проекции A′ до оси x. $A_Z A''' = A'A_X$.

Связь между горизонтальной и профильной проекциями точки может быть установлена с помощью отрезков $[A'A_Y]$ и $[A_Y A''']$ и сопрягающей их дуги окружности, с центром в точке пересечения координатных осей – O. Положение профильной проекции по заданным горизонтальной и фронтальной

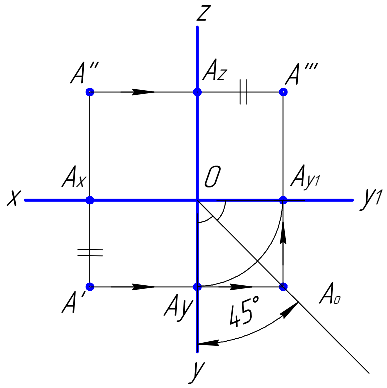


Рис.3.10

проекциям может быть найдено и без проведения дуги окружности. В этом случае эта связь устанавливается с помощью ломанной линии $A'A_0A'''$ с вершиной A_0 на биссектрисе угла, образованного с осями y (рис.3.10). Биссектриса OA_0 называется постоянной прямой Монжа. Это правило применимо для точек, расположенных в любом октанте пространства. Для точки A, заданной двумя проекциями A′, A″ (рис.3.11), третью проекцию можно построить так:

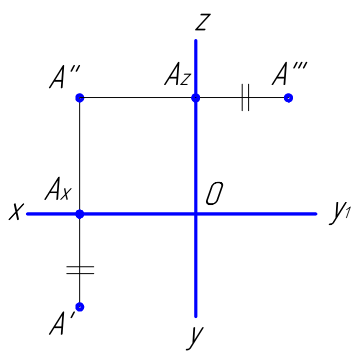
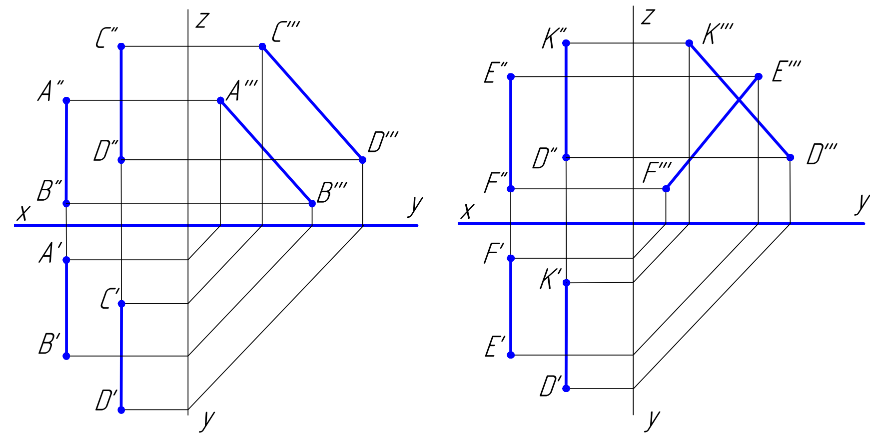


Рис.3.11

1. Проводим через точку A'' горизонтальную линию связи, и отмечаем точку A_Z.
2. Откладываем на линии связи от точки A_Z вправо отрезок $A_Z A''' = A'A_X$

прямые $KL \dot{-} EF$, т.к. $K'''L''' \cap E'''F'''$, а $E'F' \parallel K'D'$.

Правило построения на чертеже пересекающихся в пространстве прямых вытекает из 4 свойства параллельного проецирования (см. пункт 2.2 стр.9) – если линии пересекаются, то их проекции так же пересекаются. Точки пересечения этих линий лежат на одном перпендикуляре к оси X. $m \cap n = k$, $m' \cap n' = k'$, $m'' \cap n'' = k''$, $(k'\ k'') \perp x$ (рис. 4.22).



а б

Рис. 4.21

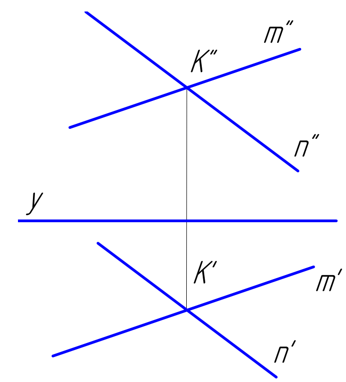


Рис. 4.22

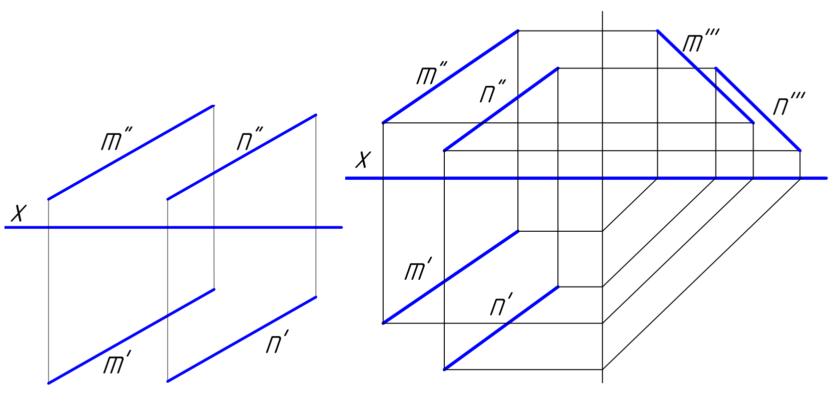
Последний вариант – скрещивающиеся прямые (т.е.

Правило построение на комплексном чертеже параллельных прямых вытекает из пятого свойства параллельного проецирования (см. пункт 2.2. стр. 9) – если в пространстве прямые параллельны, то их одноименные проекции также параллельны между собой (рис. 4.20).

$m \parallel n \Rightarrow m'' \parallel n''$, $m' \parallel n'$ (рис. 4.20, *а*)

Причем, если в пространстве прямые m и n занимают общее положение относительно плоскостей проекции, то для выяснения их параллельности друг другу достаточно убедиться параллельности между собой их одноименных проекций на двух плоскостях. Параллельность на третьей плоскости автоматически удовлетворяется.

То есть, если $m \parallel n$, то $m'' \parallel n''$, $m' \parallel n'$ и тогда $m''' // n'''$ (рис. 4.20)



а *б*

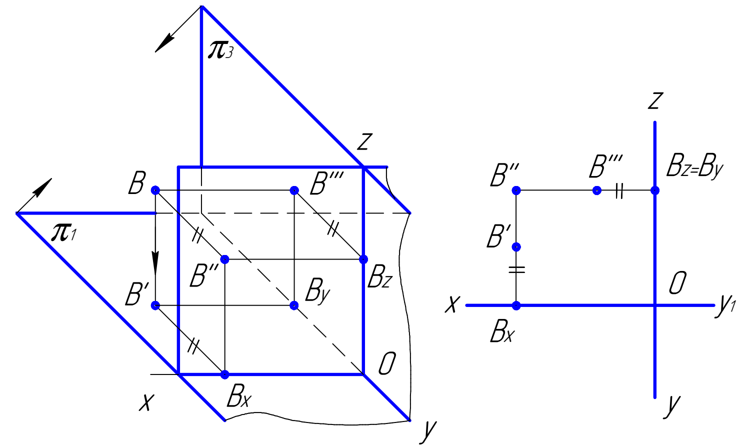
Рис. 4.20

Если прямые параллельны какой-либо плоскости, то в этом случае, для выяснения вопроса параллельности прямых в пространстве, необходима параллельность проекций на той плоскости, которой они параллельны.

На рис. 4.21 показаны два возможных варианта взаимного расположения прямых (AB) и (CD) (рис. 4.21а), и (EF) и (KL) (рис.4.21, *б*).

В данном примере на рис. 4.21, *а* прямые $AB \parallel CD$, а

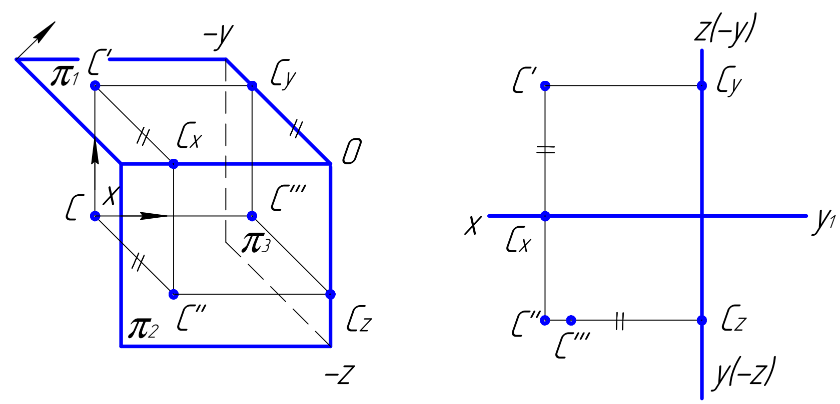
На рис.3.12 показано построение проекции точки B, расположенной во II октанте пространства.



а *б*

Рис. 3.12

На рис.3.13 показано построение проекции точки, расположенной в III октанте пространства.



а *б*

Рис.3.13

На рис.3.14 показано построение проекций точки E, расположенной в IV октанте пространства.

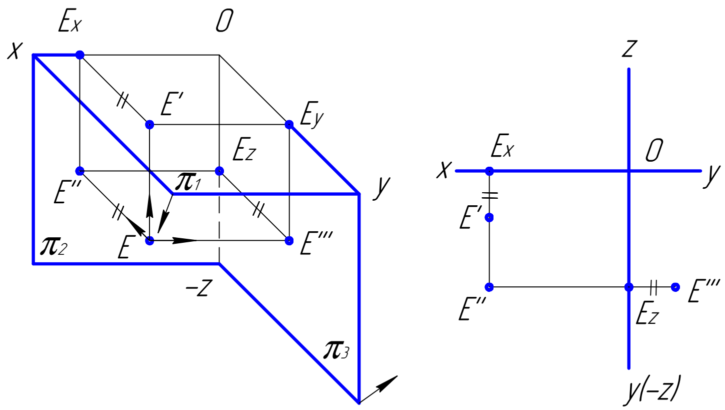


Рис.3.14

На рис.3.15 показано построение проекций точек $A \in \pi_1$ и $B \in$ оси Z.

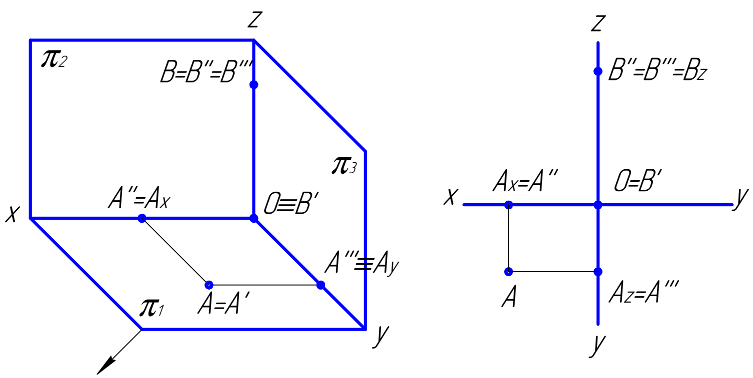


Рис.3.15

3.3Построение точки по её координатам.

Положение точки А в координатной системе плоскостей проекций определяется тремя её координатами, показывающими величины расстояний, на которые точка удалена от плоскостей проекций (рис.3.16).

Отрезок $AA''' = OA_X = x$ – абсцисса точки, отрезок $AA'' = OA_Y = y$- ордината точки, отрезок $AA' = OA_Z = z$ – аппликата точки. Следовательно, положение точки в пространстве определяется тремя координатами –A(x,y,z), а на чертеже - $A'(x,y)$, $A''(x,z)$, $A'''(y,z)$.

на проекции ℓ' и вертикальной линии связи. Аналогично находим проекции фронтального следа прямой $N' = \ell' \cap x$, $y_N = 0$, $N'' = \ell' \cap (N''N')$

Анализируя положение прямой можно увидеть, что в точке М прямая переходит из I четверти в IV, а в точке N – во II.

Отрезок MN (рис. 4.18, *а*) расположен в I четверти и считается видимым; остальные части прямой невидимые (если считать плоскости π_1, π_2 не прозрачными). Если заданы оси проекций (рис. 4.19) и прямая m (m″,m′) то ее следы можно определить в следующем порядке.

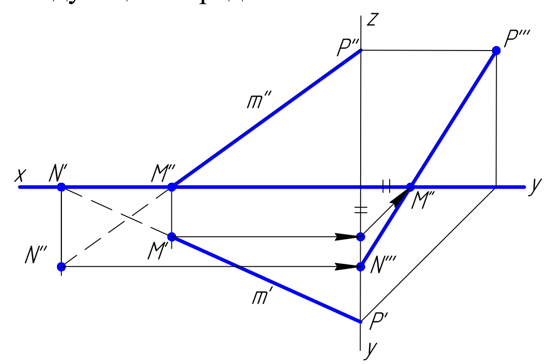


Рис. 4.19

1. Горизонтальный след M; $Z_M = 0 \Rightarrow M''=m''\cap x$, $M'=(M''M')\cap m'$;

2. Фронтальный след N; $Y_N = 0 \Rightarrow N'=m'\cap x$, $N''=(N''N')\cap m''$;

3. Профильный след P; $X_P = 0 \Rightarrow P'=m'\cap y$, $P''= m''\cap z$.

4.5. Взаимное расположение прямых.

Прямые линии в пространстве могут занимать различные положения относительно друг друга.

Они могут быть:

а) параллельными (m‖n);

б) пересекающимися (m∩n);

в) скрещивающимися (m∸n).

На рис. 4.17 показаны прямые *h, f и p*. Прямая *h* – принадлежит горизонтальной плоскости. $\ell \in \pi_1$, прямая *f* – принадлежит фронтальной плоскости, $f \in \pi_2$, а прямая *p* – принадлежит профильной плоскости.

На рис. 4.17. профильные проекции прямых *h, f* не показаны.

Признак на чертеже прямых частного положения. Две проекции прямых параллельны осям, а действительная величина отрезка им принадлежащего определяется непосредственно на чертеже.

4.4. Следы прямой

След – точка пересечения прямой с плоскостью проекций. Следу присваивается название той плоскости, которой он принадлежит.

На рис. 4.15, *а* изображена прямая ℓ общего положения, которая пересекает горизонтальную плоскость π_1 в точке M, а фронтальную π_2 в точке N.

Точка M – горизонтальный след прямой ℓ, а точка N – фронтальный след прямой ℓ.

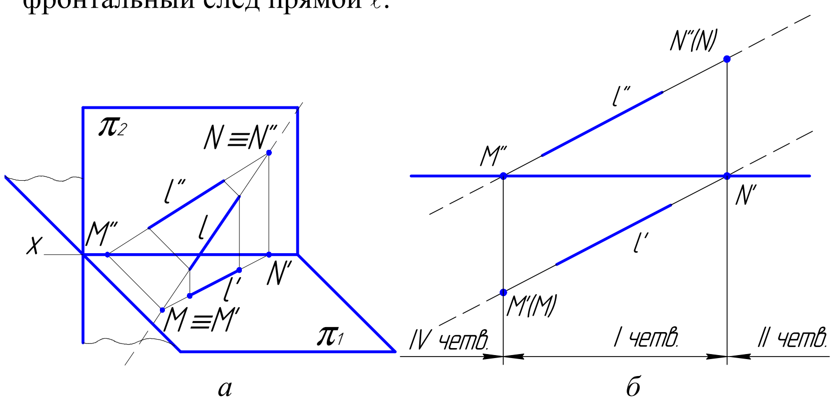


Рис. 4.18

Горизонтальный след $M = \ell \cap \pi_1$ (рис.4.18, *б*) совпадает со своей горизонтальной проекцией M' имеет координату $Z_м=0$. Следовательно, $M'' = \ell'' \cap x$, а $M' = (M''M') \cap \ell'$, то есть лежит

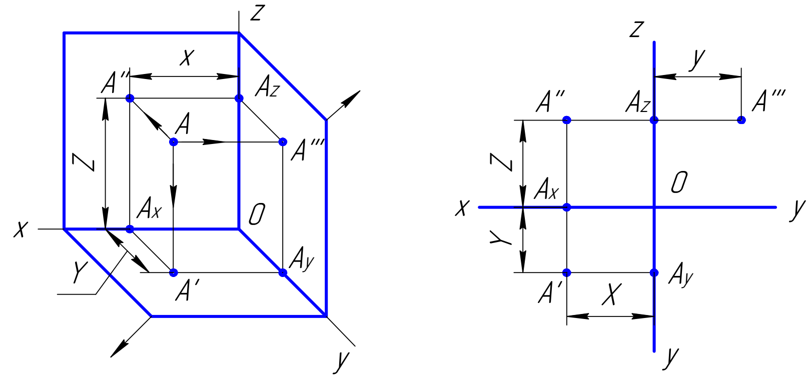


Рис.3.16

Пример 1. Построить проекции точки A(30, 20,10), т.е. A(x=30, y=20, z=10) на комплексном чертеже и определить её положение.

Решение. Так как все заданные координаты положительны, следовательно точка A расположена в I октанте.

1. Для построения горизонтальной проекции A' используем координаты x и y(рис.3.17, *а*):

а) на оси x отмечаем точку A_X так, чтобы $OA_X = x = 30$мм.

б) на оси y отмечаем точку A_Y так, чтобы $OA_Y = y = 20$мм.

в) из этих точек восстанавливаем перпендикуляры к соответствующим осям.

Точка пересечения перпендикуляров определяет горизонтальную проекцию точки A'.

2. Для построения фронтальной проекции плоскости A'' точки A, используем координаты x, z(рис.3.17, *б*):

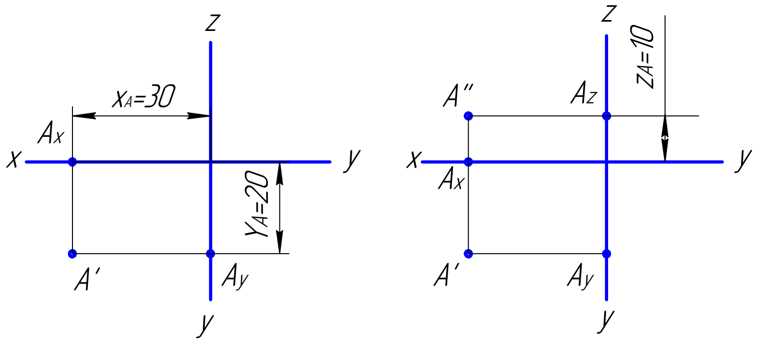
а) из точки A_X проводим перпендикуляр к оси x, так как A' и A'' лежат на одном перпендикуляре к оси x.

б) по оси z отмечаем точку A_Z так, чтобы $OA_Z = 10$мм и проводим перпендикуляр к оси z.

в) точка пересечения перпендикуляров определит точку A''.

3. Для построения профильной проекции A''' точки A используем координаты z, y(3.17, *в*):

а) из точки A_Z проводим линию параллельную оси x и откладываем вправо от точки A_Z отрезок $A_ZA''' = y = 20$мм.



а *б*

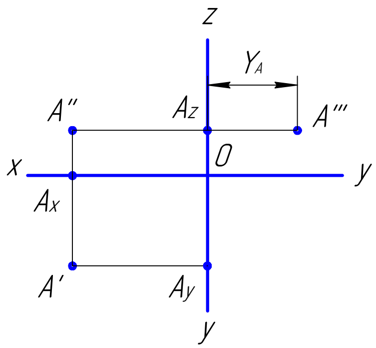


Рис. 3.17, в

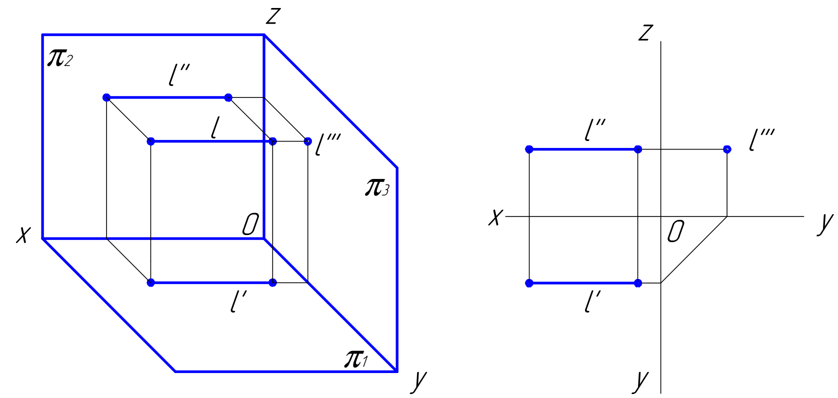
Пример 2. Построить проекцию точки B (20, 15, 0) на комплексном чертеже и определить её положение (рис. 3.18).

Решение. Точка B имеет координату z = 0. Следовательно она принадлежит горизонтальной плоскости π_1, разделяющей I и IV октанты.

1. Для построения горизонтальной проекции B' точки B используем координаты x и y:
   а) на оси x отмечаем точку B_X так, чтобы $OB_X = x_B = 20$мм.
   б) на оси y отмечаем точку B_Y так, чтобы $OB_Y = y = 15$мм.
   в) находим точку B'.
2. Для построения фронтальной проекции B" точки B используем координаты x и z:
   а) на оси z отмечаем точку B_Z так, чтобы $OB_Z = 0$, то есть точка B_Z совпадает с точкой O.
   б) определяем точку $B'' = B_X$.

горизонтальная проекции параллельны оси *x* (рис. 4.16)

$\ell \perp \pi_3,\ \ell''' \rightarrow (\cdot),\ \ell',\ \ell'' \parallel x.$



а *б*

Рис. 4.16

III. *Прямые, принадлежащие плоскости проекций.* Характерным признаком на чертеже таких прямых, будет принадлежность двух проекций прямой координатным осям.

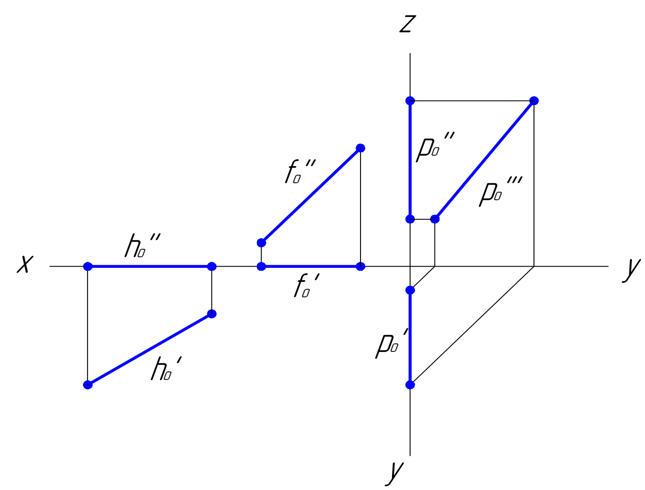
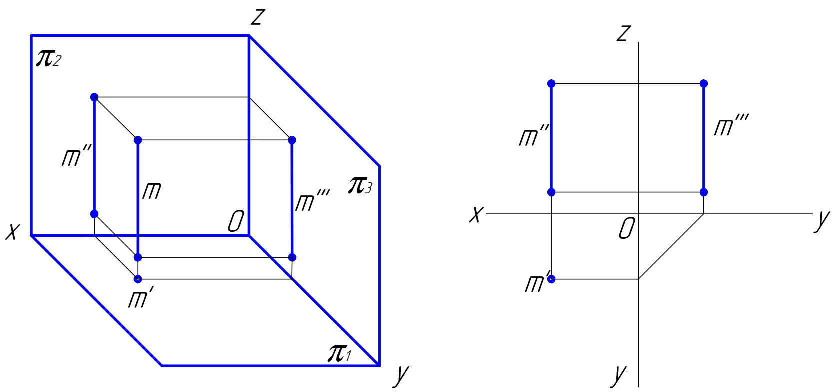


Рис. 4.17

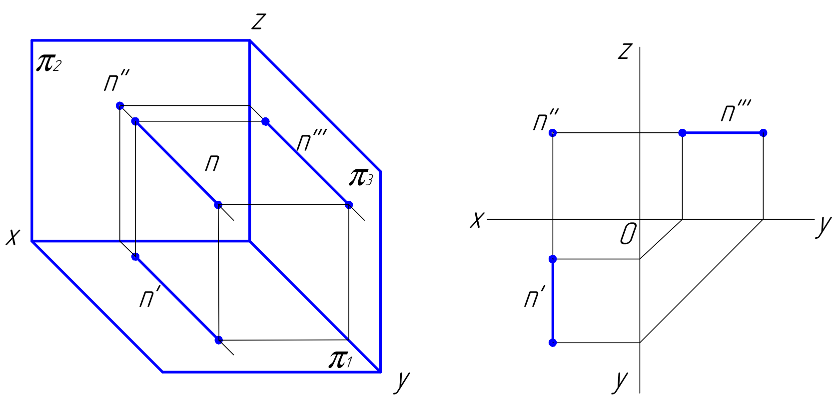


а *б*

Рис. 4.14.

2. Фронтально–проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций. Фронтальная проекция такой прямой точка, а горизонтальная и профильная проекции параллельны оси *y* (рис. 4.15).

$n \perp \pi_2$, $n'' \rightarrow (\cdot)$, n', $n''' \parallel y$



а *б*

Рис. 4.15.

3. Профильно – проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекции. Профильная проекция такой прямой *точка*, а фронтальная и

3. Для построения профильной проекции B''' точки B используем координаты z и y:

а) из точки $B_Z = 0$ уже проведён перпендикуляр (так как он совпадает с осью y), то от точки $B_Z = 0$ откладываем отрезок $[B_Z\, B''']$ равный координате y_B = 15мм.

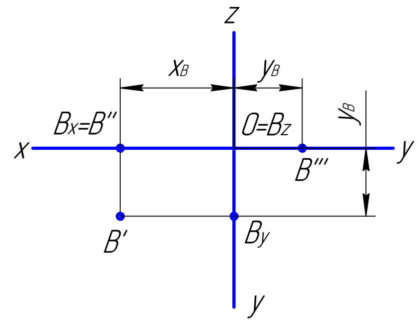
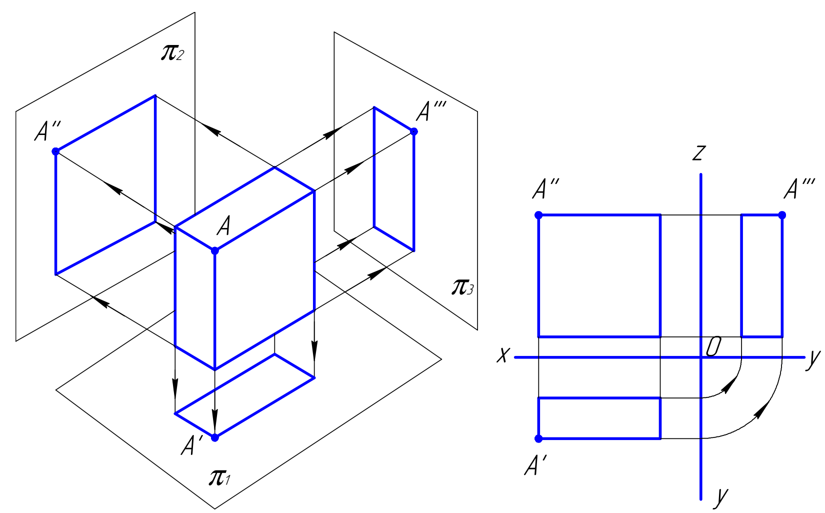


Рис.3.18

На рис. 3.18 показано построение проекций геометрического тела и точки А, принадлежащей этому телу (рис.3.19, *а* – пространственная модель, рис. 3.19, *б* – комплексный чертёж).



а *б*

Рис. 3.19

ГЛАВА IV

Линия

Линии имеют большое значение в инженерной графике. Линии позволяют установить и исследовать функциональную зависимость между различными величинами.

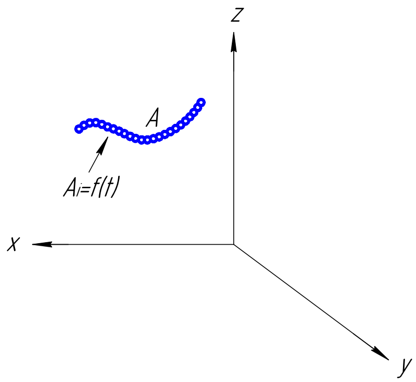


Рис.4.1

Умело подбирая линии, дизайнер имеет возможность придать изящные и эстетически красивые формы конструируемым изделиям.

При определении геометрических фигур, в геометрии исходят из основных неопределяемых понятий – точка, прямая, плоскость, а в современном представлении

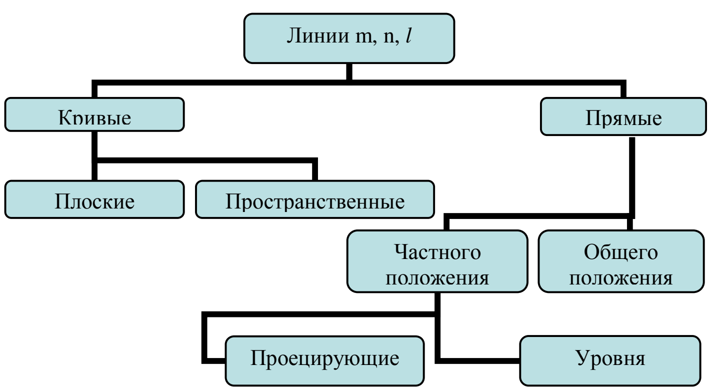
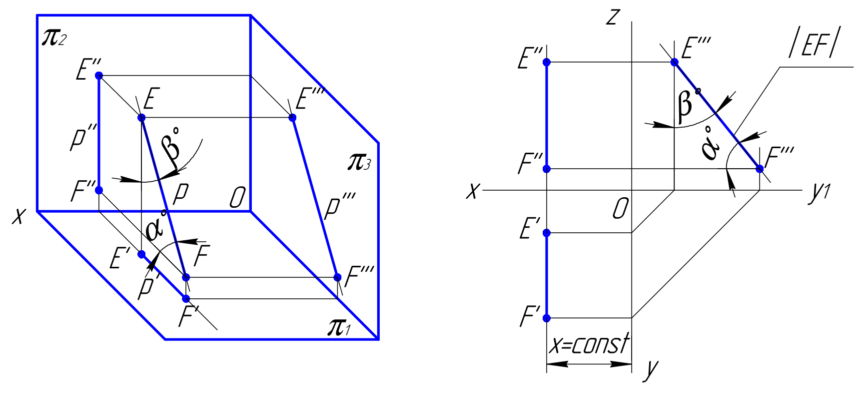


Рис. 4.2

3. Профильная прямая - прямая параллельная профильной плоскости проекций. Эта прямая обозначается $PP \| \pi_3$ (рис. 4.13, *а*)



а *б*

Рис. 4.13

Все точки профильной прямой удалены на одинаковое расстояние от плоскости π_3 ($x_E=x_F$). Поэтому горизонтальная проекция любой такой прямой параллельна оси y, а фронтальная проекция параллельна оси *z*. $P' \| y$, $P'' \| z$. Профильная проекция может занимать любое положение. Величины углов α и β, которые она составляет с плоскостями π_1, π_2, а также действительная величина отрезка *EF*, проецируются на профильную плоскость π_3 без искажения (рис. 4.13, *б*).

$|E'''F'''| = |EF|$: $\angle\alpha^\circ|P\pi_1|$ $|P'''Y|$ $\angle\beta^\circ|P\pi_2|$ $|P'''z|$

II. Прямые перпендикулярные плоскости проекций называются *проецирующими прямыми*.

1. Горизонтально–проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция такой прямой – точка, а фронтальная и профильная проекции параллельны оси *z* (рис. 4.14).

$m \perp \pi_1$, $m' \rightarrow (\cdot)$, m'', $m''' \| z$

Все точки горизонтали удалены на одинаковое расстояние от плоскости $\pi_1 (Z_A = Z_B)$. Поэтому фронтальная проекция любой горизонтали параллельна оси x, а профильная - оси y, $h'' \| x$, $h''' \| y_1$. (рис.4.11, *б*).

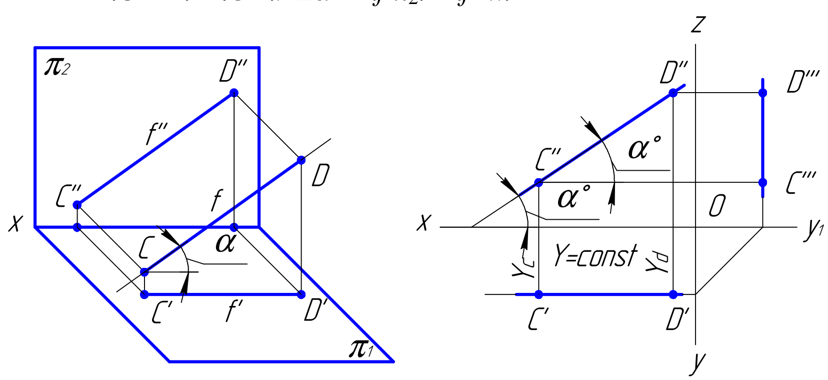
Горизонтальная проекция может занимать любое положение. Величина угла β°, который она составляет с фронтальной плоскостью π_2 , а также действительная величина отрезка AB проецируется на горизонтальную плоскость π_1 без искажения $|A'B'| = |AB|$, $\angle\beta^\circ = |h\pi_2| = |h'x|$

2. *Фронталь* – прямая, параллельная фронтальной плоскости проекции. Её принято обозначать f. $f \| \pi_2$. (рис.4.12, *а*).

Все точки фронтали удалены на одинаковое расстояние от плоскости π_2 ($y_c = y_D$). Поэтому горизонтальная проекция любой фронтали, параллельна оси x, а профильная оси z, т. $f' \| x$, $f''' \| z$.

Фронтальная проекция может занимать любое положение. Величина угла α°, который она составляет с горизонтальной плоскостью π_1, а также действительная величина отрезка CD проецируется на фронтальную плоскость π_2 , без искажения (рис. 4.12, *б*).

$|C''D''| = |CD|$. $\angle\alpha^\circ = |f\pi_2| = |f''x|$



а *б*

Рис. 4.12

также понятия множество. Следовательно, линию можно рассматривать как непрерывное множество принадлежащих ей точек. С кинематической точки зрения линия – это траектория движущейся в пространстве точки (рис. 4.1).

4.1 Кривые линии

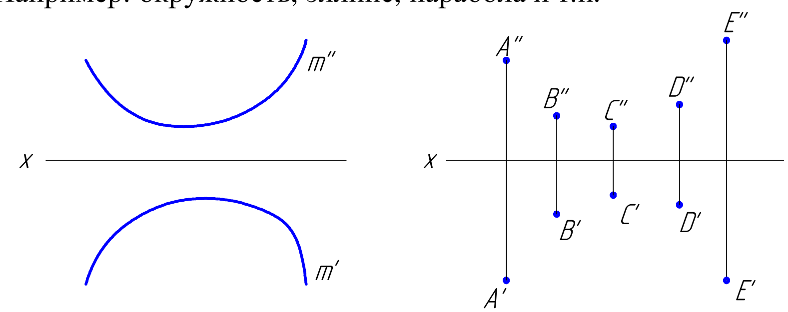
Кривой называется линия, образованная движущейся точкой, которая изменяет направление своего движения.

Линии могут быть заданы трансцендентными (синусоида, циклоида, спираль Архимеда и др.) уравнениями.

В инженерной графике кривая задается либо двумя (тремя) её проекциями (рис. 4.3, *а*), либо проекциями ряда точек составляющих эту линию (рис. 4.3, *б*).

Кривые линии делятся на *пространственные и плоские*.

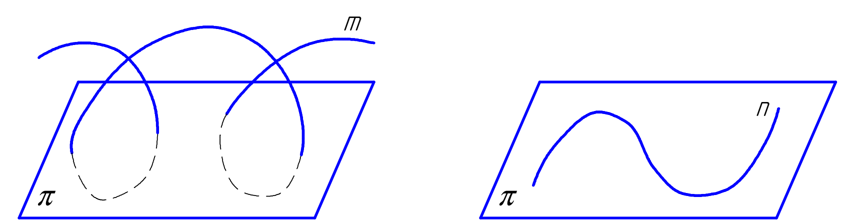
Например: окружность, эллипс, парабола и т.п.



а *б*

Рис.4.3

Пространственными называются кривые линии, все точки которых не лежат в одной плоскости (рис. 4.4, *а*).



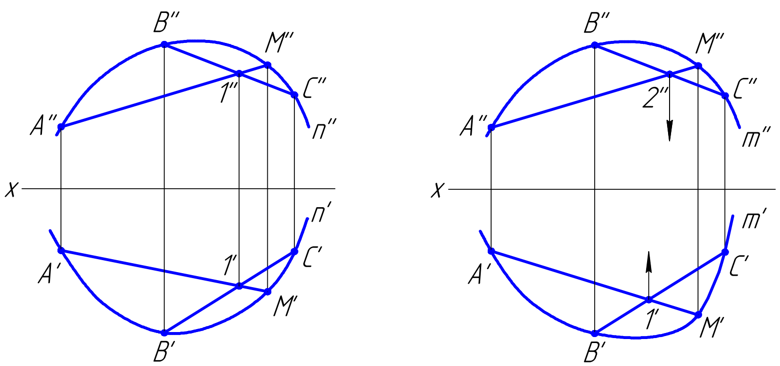
а *б*

Рис.4.4

Плоскими называются кривые линии, все точки которых лежат в одной плоскости.

Следует иметь в виду, что по двум ортогональным проекциям кривой нельзя сразу определить какой кривой (плоской или пространственной) соответствуют данные проекции.

Чтобы установить какая (плоская или пространственная) кривая линия задана на комплексном чертеже, необходимо выяснить, принадлежат ли все точки кривой одной плоскости. Если принадлежат – кривая плоская, в противном случае – пространственная.



а *б*

Рис.4.5

Кривая *n* (рис. 4.5, *а*) плоская, т.к. точка *M*, взятая на кривой принадлежит плоскости, определяемой тремя другими точками A,B,C этой кривой.

Кривая *m* (рис. 4.5, *б*) пространственная, т.к. точка *M*, взятая на кривой, не принадлежит плоскости, определяемой тремя другими точками A,B,C этой кривой.

Из пространственных кривых в технике широкое применение находят *винтовые* линии. Винтовую линию можно рассматривать как результат перемещения точки по поверхности вращения. Если задать точку на поверхности цилиндра, а затем вращать цилиндр вокруг его оси и равномерно перемещать точку вдоль оси цилиндра, то точка опишет на цилиндрической поверхности пространственную кривую, называемую цилиндрической винтовой линией.

Проекции прямой общего положения всегда меньше его действительной величины и не могут быть определены непосредственно с чертежа. Способы определения действительной величины отрезка прямой общего положения будут рассмотрены в разделе «Способы преобразования чертежа».

4.3. Частные случаи расположения прямой

Кроме рассмотренного общего случая (рис. 4.8), прямая по отношению к заданной системе плоскостей проекции может занимать частное положение:

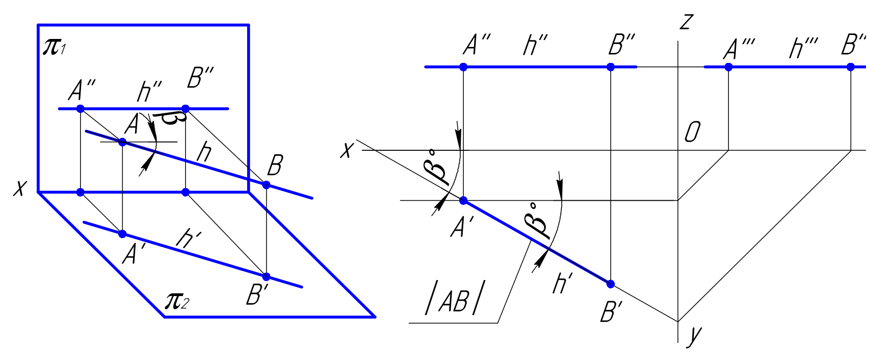
1) параллельное плоскости проекций (прямые уровня)

2) перпендикулярное плоскости проекций (проецирующие прямые)

3) принадлежать плоскости проекций.

I. Прямые параллельные плоскостям проекций называют также *линиями уровня* (горизонталь, фронталь, профильная прямая).

1. *Горизонталь* – прямая параллельная горизонтальной плоскости проекции. Ее принято обозначать буквой *h*. $h \parallel \pi_1$ (рис. 4.11, *а*).



а *б*

Рис. 4.11

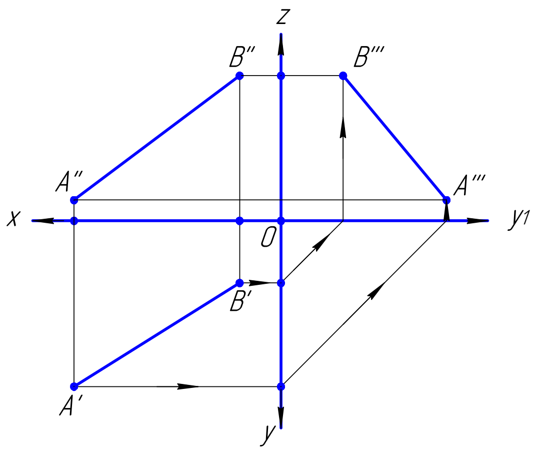
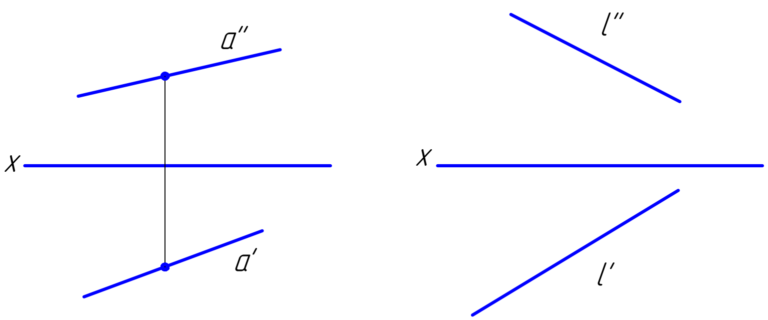


Рис. 4.9



а *б*

Рис. 4.10

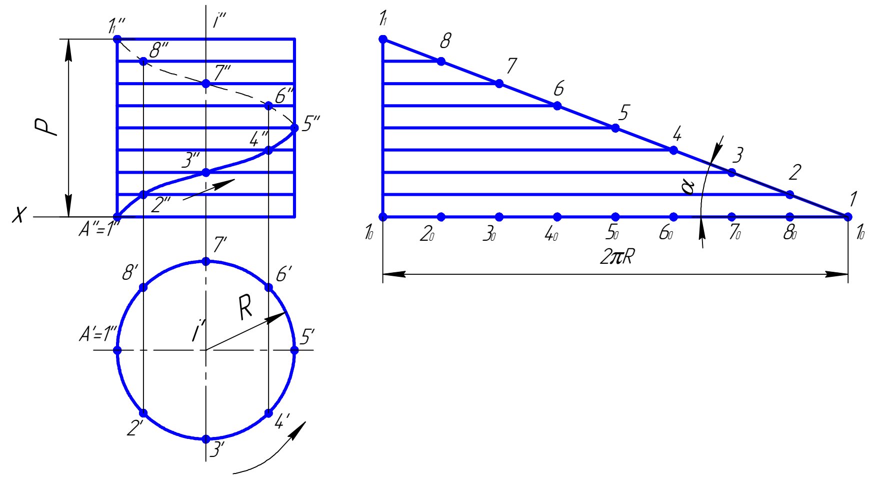
На рис. 4.8 изображена прямая *ℓ (A,B)*, занимающая произвольное (общее) положение к плоскостям проекций (углы наклона прямой к плоскостям произвольные – отличные от 0, 90˚).

Итак, прямая не параллельная и не перпендикулярная плоскостям проекции называется *прямой общего положения*. На комплексном чертеже (рис.4.8) проекции прямой *ℓ* составляют с осями угол отличный от 0° и 90˚.

Следовательно: Признак на чертеже такой прямой: проекции отрезка прямой общего положения не параллельны и не перпендикулярны осям проекции.

Ось цилиндра будет осью винтовой линии, а радиус цилиндра – радиусом винтовой линии. Если вращение цилиндра и прямолинейное перемещение точки будет равномерным, то полученную цилиндрическую винтовую линию называют гелиссой, т.е. гелисса представляет собой траекторию движения точки, равномерно вращающейся вокруг оси и одновременно перемещающейся с постоянной скоростью вдоль этой оси. Величину Р перемещения точки в направлении оси, соответствующую одному обороту ее вокруг оси, называют шагом винтовой линии (рис. 4.6).

На рис. 4.6 показано построение проекций цилиндрической винтовой линии.



а *б*

Рис. 4.6

Окружность основания цилиндра (горизонтальная проекция геллисы) делим на одинаковое число равных частей (здесь 8). На такое же число частей делим шаг (на фронтальной проекции). Из точек деления окружности проводим линии связи, а через соответствующие точки деления шага – горизонтальные прямые. Соединив полученные точки (1", 2", … 8") пересечения этих прямых плавной кривой, получим фронтальную проекцию винтовой линии (геллиссы). Таким образом, горизонтальная проекция геллисы – *окружность,* а фронтальная – *синусоида.*

Цилиндрические винтовые линии подразделяются на правые и левые (с правым и левым ходом). Направление определяется направлением движения точки. Винтовые линии называют правыми, если при взгляде на встречу подъёму вращения происходит против часовой стрелки (рис. 4.6, *а*). В противном случае, винтовые линии называют левыми. Развёрткой винтовой линии (рис. 4.6, *б*) является прямая (1,2, …..8), которая образует с горизонталью угол *a* – угол подъёма винтовой линии.

$$tg\alpha = \frac{p}{\pi d}$$

Рассматриваемая нами винтовая линия называется однозаходной. У однозаходной винтовой линии шаг равен ходу.

Если синхронно с точкой А совершает движение точка В, то на той же высоте очерчиваются две винтовые линии (рис.4.7), которые называют двухзаходными. В этом случае величина *H* называется ходом, а шагом *P* называют расстояние между двумя одноименными точками.

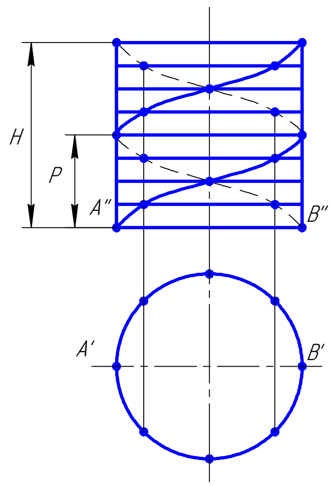


Рис. 4.7

Если движение точки будет происходить по конической поверхности, то получим коническую винтовую линию.

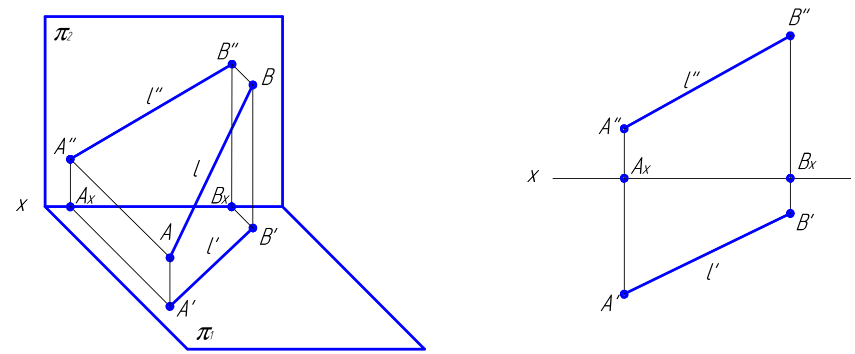
4.2. Прямая линия

Прямой называется линия, образованная движением точки, не меняющей направления движения. В пространстве прямая линия определяется положением двух нетождественных точек ей принадлежащих. На комплексном чертеже, соответственно, она определяется проекциями этих точек.

Определитель прямой $\ell - \ell\ (A,B)$

На рис. 4.8, *а* прямая линия задана проекциями точек *A* и *B*. $\ell'(A',B')$ – горизонтальная проекция прямой ℓ, $\ell''\ (A'',B'')$ – фронтальная проекция прямой ℓ.

При решении многих задач бывает достаточным задание двух проекций прямой, т.к. две проекции прямой определяют её положение в пространстве.



а *б*

Рис. 4.8

При необходимости можно построить и профильную проекцию прямой $\ell'''(A''', B''')$. При построении ось *Z* выбирается произвольно, исходя из удобства чертежа (рис. 4.9).

Прямую можно задать не только проекциями отрезка, а можно ограничиться обозначением только одной буквой, отнеся её к какой-либо точке прямой (рис.4.10, *а*) или к проекции в целом (рис.4.10, *б*).